DEUG Sciences 1er niveau - Mentions MASS, MIAS

UE 5 - MA4

Examen du 12 septembre 2001 - Durée 2 heures

Tous les documents et calculettes sont interdits

Barème indicatif : QC(6 pts), I (7 pts), II (7 pts)

Questions de cours

1) Démontrer que tout polynme de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair a au moins une racine réelle.

2) Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On suppose que $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) \geq 0$. Montrer que f est croissante sur $[a,b]$.

3) Enoncer la formule de Taylor avec reste de Young.

Exercice n°1

1) Déterminer le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de $x = 1$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2 \ell n\, x}{x^2 - 1}$.

2) On considère l'équation différentielle $(E)\ \ x(x^2-1)y' + 2y = x^2$.

a) Déterminer les solutions de (E) sur chacun des intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,0[$, $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.

b) Montrer que (E) admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

c) Cette solution est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?

Exercice n°2

Soient λ un réel de $]0,1[$ et n un entier naturel. On considère la fonction polynme $P_n : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

1) On cherche à montrer que l'équation $P_n(x) = \lambda e^x$ admet une unique solution strictement positive, que l'on notera x_n, et que la suite (x_n) est strictement monotone.

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on considère la fonction $f_n : x \mapsto P_n(x) - \lambda e^x$. Déterminer f_n' et étudier la limite de $f_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

b) Conclure à l'aide d'une démonstration par récurrence.

2) On suppose que la suite (x_n) est bornée.

a) Ecrire la formule de Taylor-Maclaurin (avec reste de Lagrange) pour la fonction exponentielle.

b) Démontrer alors que la suite $\left(P_n(x_n) - e^{x_n}\right)_n$ converge vers 0.

3) Déduire de la question précédente que l'on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.