Corrigé rapide de l'examen du 11 septembre 2000

$\boxed{\text{Questions de cours}}$ *(4 points)* Soit f une fonction réelle définie et continue sur le segment $[a,b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ (avec $a<b$). Si $f(a)=f(b)=0$, alors il existe c appartenant à $]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.

Démonstration : On pose $M=\sup(f[a,b])$ et $m=\inf(f([a,b]))$. Ces bornes existent et sont atteintes par f puisque f est continue sur le segment $[a,b]$. Comme $f(a)=0$, on doit avoir $m\le 0\le M$. Si $m=0=M$, c'est que f est constante et égale à 0 sur $[a,b]$, et donc sa dérivée est partout nulle sur $]a,b[$. Sinon, on a par exemple $M>0$. Soit $c\in]a,b[$ tel que $f(c)=M$. Alors f présente un maximum (local) en c et donc on a $f'(c)=0$.

Exercice n°1 *(3 points)*

On a $\sin x = x-\frac{x^3}{6}+x^3\varepsilon(x)$ et $\sqrt{1+u}=1+\frac12 u-\frac18 u^2+\frac1{16}u^3+u^3\varepsilon(u)$. On en déduit par composition $\sqrt{1+\sin x}=1+\frac12 x-\frac18 x^2-\frac1{48}x^3+x^3\varepsilon(x)$. Comme $e^{-\frac{x}{2}}=1-\frac12 x+\frac18 x^2-\frac1{48}x^3+x^3\varepsilon(x)$, on a finalement $\dfrac{\sqrt{1+\sin x}+e^{-\frac{x}{2}}-2}{x^3}=-\dfrac{1}{24}+\varepsilon(x)$ et la limite cherchée vaut $-\frac{1}{24}$.

Exercice n°2 *(6 points)*

1)

a) Soient $a<x<y$. $x\in]a,y[$ donc on peut écrire $x=ta+(1-t)y$ pour un certain t de $]0,1[$. f étant convexe, on a alors $f(x)-f(a)=f(ta+(1-t)y)-f(a)\le tf(a)+(1-t)f(y)-f(a)$. Or $x-a>0$ donc $g_a(x)\le \dfrac{tf(a)+(1-t)f(y)-f(a)}{ta+(1-t)y-a}=\dfrac{f(y)-f(a)}{y-a}=g_a(y)$. g_a est donc bien croissante sur $]a,+\infty[$.

Soit M un majorant de $|f|$ sur $\mathbb{R}$ (cela existe car f est bornée). $\forall x>a$, $|g_a(x)|\le \dfrac{2M}{|x-a|}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2M}{|x-a|}=0$ d'où le résultat.

b) On déduit de a) que g_a est négative sur $]a,+\infty[$ et donc que : $\forall x,a\in\mathbb{R}$, $x>a\Rightarrow f(x)-f(a)\le 0$ ce qui traduit que f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

2) φ est clairement bornée et, pour $x,y\in\mathbb{R}$ et $t\in[0,1]$,

$$\varphi(tx+(1-t)y)=f(t(-x)+(1-t)(-y))\le tf(-x)+(1-t)f(-y)=t\varphi(x)+(1-t)\varphi(y)$$

D'après 1), φ est décroissante sur $\mathbb{R}$ et donc f est croissante sur $\mathbb{R}$ (pour $x\le y$, $-x\ge -y$ donc $\varphi(-x)\ge\varphi(-y)$ c'est à dire $f(x)\ge f(y)$).
f étant donc à la fois croissante et décroissante, f est constante sur $\mathbb{R}$.

3) En résumé, *les seules fonctions réelles convexes et bornées sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions constantes* (qui sont bien convexes et bornées).

Exercice n°3 *(7 points)*

1) Soient x un réel et $h>0$.

a) f étant de classe C^2 sur $[x,x+h]$ (resp. $[x-h,x]$) et $f^{(3)}$ existant sur $]x,x+h[$, la formule de Taylor-Lagrange appliquée à f assure l'existence de réels θ_1 et θ_2 de $]0,1[$ tels que :

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\frac{h^3}{6}f^{(3)}(x+\theta_1 h)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x-\theta_2 h)$$

b) On en déduit par une résolution immédiate que

$$2hf'(x) = f(x+h) - f(x-h) - \frac{h^3}{6}\left(f^{(3)}(x+\theta_1 h) + f^{(3)}(x-\theta_2 h)\right)$$

$$h^2 f''(x) = f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) + \frac{h^3}{6}\left(f^{(3)}(x-\theta_2 h) - f^{(3)}(x+\theta_1 h)\right)$$

et donc $2h|f'(x)| \leq 2M_0 + \frac{h^2}{6}2M_3$ et $h^2|f''(x)| \leq 4M_0 + \frac{h^2}{6}2M_3$.

2) En prenant par exemple $h = 1$, on voit que f' et f'' sont bien bornées sur $\mathbb{R}$.

3)

a) φ et ψ sont des fractions rationnelles dérivables sur $]0, +\infty[$ et on a, pour $h > 0$, $\varphi'(h) = -\frac{M_0}{h^2} + h\frac{M_3}{3}$ et $\psi'(h) = -8\frac{M_0}{h^3} + \frac{M_3}{3}$. On en déduit que φ admet un maximum en $\sqrt[3]{\frac{3M_0}{M_3}}$ et que ψ admet un maximum en $2\sqrt[3]{\frac{3M_0}{M_3}}$.

b) On déduit alors de 1)b) que pour tout réel x, $|f'(x)| \leq \varphi(\sqrt[3]{\frac{3M_0}{M_3}}) = \dfrac{\sqrt[3]{9}}{2}\sqrt[3]{M_0^2 M_3}$ et de même, $|f''(x)| \leq \psi(2\sqrt[3]{\frac{3M_0}{M_3}}) = \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{M_0 M_3^2}$ et on a donc $C_1 = \dfrac{\sqrt[3]{9}}{2}$ et $C_2 = \sqrt[3]{3}$.