DEUG Sciences 1er niveau - Mentions MASS, MIAS

UE 5 - MA4

Examen du Lundi 11 septembre 2000 - Durée 2 heures

Tous les documents et calculettes sont interdits

Barème indicatif : QC(4 pts), I (3 pts), II (6 pts), III (7 pts)

Question de cours

Enoncer et démontrer le théorème de Rolle.

Exercice n°1

Déterminer la limite lorsque x tend vers 0 de $\dfrac{\sqrt{1+\sin x}+e^{-\frac{x}{2}}-2}{x^3}$.

Exercice n°2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et bornée.

1) Soit a un réel quelconque. On pose $g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

a) Montrer que g_a est croissante sur $]a,+\infty[$ (on pourra, pour $a < x < y$, écrire x sous la forme $x = ta + (1-t)y$, pour un t convenablement choisi).
Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g_a(x) = 0$.

b) En déduire que f est décroissante sur $\mathbb{R}$ (observer le signe de g_a).

2) Montrer que $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(-x)$ est aussi convexe (utiliser la définition) et bornée. Qu'en déduit-on pour f ?

3) Enoncer un résultat résumant cet exercice.

Exercice n°3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^3. Pour k dans $\{0,1,2,3\}$, on note $M_k = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left|f^{(k)}(x)\right|$. On suppose que M_0 et M_3 sont finis.

1) Soient x un réel et $h > 0$.

a) Ecrire les formules de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 au voisinage de x d'une part pour un accroissement $+h$ et d'autre part pour un accroissement $-h$.

b) Résoudre le système linéaire d'inconnues $f'(x)$ et $f''(x)$ ainsi obtenu et en déduire :

$$|f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + h^2\frac{M_3}{6}$$

$$|f''(x)| \leq \frac{4M_0}{h^2} + h\frac{M_3}{3}$$

T. S. V. P.

3) Soient $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ et $\psi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ les fonctions données pour $h > 0$ par $\varphi(h) = \dfrac{M_0}{h} + h^2 \dfrac{M_3}{6}$ et $\psi(h) = \dfrac{4M_0}{h^2} + h\dfrac{M_3}{3}$.

a) Etudier les variations de φ et de ψ.

b) En déduire l'existence de constantes C_1 et C_2 (que l'on déterminera) telles que :

$$M_1 \leq C_1 \sqrt[3]{M_0^2 . M_3} \qquad \text{et} \qquad M_2 \leq C_2 \sqrt[3]{M_0 . M_3^2}$$