DEUG Sciences 1er niveau - Mentions MASS, MIAS

UE 5 - MA4

Corrigé rapide du contrôle du 3 avril 1999

Question de cours *(3 points)*

Une fonction réelle f définie sur un intervalle I est dite convexe quand pour tous a, b de I et pour tout t de $[0,1]$, on a

$$f(ta+(1-t)b) \leq tf(a)+(1-t)f(b)$$

Exercice n°1 *(4 points)*

1) L'équation sans second membre est $xy'+y=0$ qui admet pour solution (sur tout intervalle ne contenant pas 0), $y=\dfrac{\lambda}{x}$. On cherche alors une solution particulière sous la forme $y(x)=\dfrac{\lambda(x)}{x}$ (méthode de la variation de la constante) ce qui conduit à $\lambda'(x)=e^x$ et donc à la solution particulière $y(x)=\dfrac{e^x}{x}$. Les solutions de (E) sur $]-\infty,0[$ sont donc les fonctions de la forme $y : x \mapsto \dfrac{e^x+\lambda}{x}$. Il en est de même sur $]0,+\infty[$.

2) Ce qui précède montre qu'une solution f sur $\mathbb{R}$ est nécessairement donnée par $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x+\lambda_1}{x} & \text{si } x<0 \\ \dfrac{e^x+\lambda_2}{x} & \text{si } x>0 \end{cases}$

La continuité de f en 0 impose alors $\lambda_1=\lambda_2=-1$ (on a en effet $\lim_{x\to 0}(e^x+\lambda_1)=1+\lambda_1$ donc si $\lambda_1\neq -1$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\infty$ et de même pour λ_2). On vérifie que la fonction ainsi définie est bien une solution de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°2 *(6 points)*

1) Il est immédiat que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x on a : $f'(x)=-2\frac{x}{a^2}e^{-(\frac{x}{a})^2}$ et $f''(x)=\frac{2}{a^2}\left(2\frac{x^2}{a^2}-1\right)e^{-(\frac{x}{a})^2}=\dfrac{4}{a^4}\left(x-\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)\left(x+\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)e^{-(\frac{x}{a})^2}$. La fonction f' (impaire) est donc décroissante sur $[0,\frac{a}{\sqrt{2}}]$ et croissante sur $[\frac{a}{\sqrt{2}},+\infty[$. Comme $\lim\limits_{+\infty} f'=0$, on en déduit : $M=|f'(\frac{a}{\sqrt{2}})|=\dfrac{\sqrt{2}}{a}e^{-1/2}$. Or $a\geq 2$, $\frac{\sqrt{2}}{2}\leq 0,75$ et $e^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{e}}\leq\frac{1}{1{,}6}$ donc $M\leq\frac{0{,}75}{1{,}6}\leq\frac{1}{2}$.

2) On pose $u_0=0$ et pour $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$.

a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall x\in\mathbb{R}$, $|f'(x)|\leq\frac{1}{2}$. L'inégalité des accroissements finis donne alors $|u_{n+1}-u_n|=|f(u_n)-f(u_{n-1})|\leq\frac{1}{2}|u_n-u_{n-1}|$.
Une récurrence immédiate montre alors que $|u_{n+1}-u_n|\leq(\frac{1}{2})^n|u_1-u_0|$. Le résultat en découle puisque $|u_1-u_0|=|f(0)-0|=1$.
Le résultat précédent appliqué à $n=2p$ montre que $\lim\limits_{p\to+\infty}|u_{2p+1}-u_{2p}|=0$. Or $u_{2p+2}=f\circ f(u_{2p})$ et $u_{2p+3}=f\circ f(u_{2p+1})$ et $f\circ f$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc ces deux suites (clairement positives) sont monotones. Comme $u_0=0$, $u_2\geq u_0$ et la suite $(u_{2p})_p$ est croissante. De même, $u_1=1$ donc $u_3\leq u_1$ et la suite (u_{2p+1}) est décroissante. Finalement, les suites $(u_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

b) Les deux suites extraites (u_{2p}) et (u_{2p+1}) convergeant vers la mme limite, on en déduit que la suite (u_n) est convergente (cf MA2). On peut aussi bien sûr appliquer le théorème des fonctions contractantes.

Soit $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite finie ℓ en $+\infty$.

1) **a)** Puisque $\lim\limits_{+\infty} f = \ell$, on peut (choix de $\varepsilon = 1$) trouver un $A > 0$ tel que : $\forall x \geq A$, $|f(x) - \ell| \leq 1$.
On peut sans restriction imposer $A \geq 1$. f continue sur le segment $[1, A]$ y est alors bornée : $\exists M \geq 0$, $\forall x \in [1, A]$, $|f(x)| \leq M$. Or $\forall x \geq A$, $|f(x)| \leq 1+|\ell|$ donc $\forall x \geq 1$, $|f(x)| \leq \mathrm{Max}(M, 1+|\ell|)$ et f est bornée sur $[1,+\infty[$.

b) L'hypothèse s'écrit $\forall\varepsilon > 0$, $\exists A_\varepsilon > 0$, $\forall x \geq A_\varepsilon$, $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.
Soit alors $\varepsilon > 0$. Posons $A = A_{\frac{\varepsilon}{2}}$.
f est uniformément continue sur $[1, A]$ comme toute fonction continue sur un segment (Heine). Par suite,

$$\exists\delta > 0,\ \forall x, y \in [1, A],\ |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon/2$$

Soient alors $x, y \in [1,+\infty[$ vérifiant $|x - y| \leq \delta$.

- ou bien $x, y \in [1, A]$ et $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon/2 \leq \varepsilon$
- ou bien $x, y \in [A,+\infty[$ et $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - \ell| + |\ell - f(y)| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$
- ou bien $x \in [1, A]$ et $y > A$ (ou vice -versa). On a alors $A \in [x, y]$ et $|x - A| \leq |x - y| \leq \delta$ donc $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(A)| + |f(A) - f(y)| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

2) On suppose que f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que $f(1) = \ell$. Soit $g : [0, 1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(\frac{1}{1-x})$.

a) $x \mapsto 1 - x$ est continue sur $[0, 1[$ et ne s'annule pas sur cet intervalle donc $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est continue sur $[0, 1[$. Or l'image de $[0, 1[$ par cette dernière fonction est $[1,+\infty[$ et f est continue sur $[1,+\infty[$ donc g est continue sur $[0, 1[$ (comme composée de fonctions continues).

b) On a $\lim\limits_{x\mapsto 1^-} \dfrac{1}{1-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = \ell$ donc $\lim\limits_{x\mapsto 1^-} g(x) = \ell$. On peut donc prolonger g par continuité sur $[0, 1]$ en posant $g(1) = \ell$.

c) g est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$ (comme composée) et on a $g(0) = g(1) = \ell$. Le théorème de Rolle assure alors l'existence d'un α de $]0, 1[$ tel que $g'(\alpha) = 0$. Or $g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} f'(\frac{1}{1-x})$ donc $f'(c) = 0$ où $c = \dfrac{1}{1-\alpha} \in]1,+\infty[$.