DEUG Sciences 1er niveau - Mentions MASS, MIAS

UE 5 - MA4

Contrôle du 3 avril 1999 - Durée 2 heures

Tous les documents et calculettes sont interdits

Barme indicatif : QC(3 pts), I (4 pts), II (6 pts), III (7 pts)

Question de cours

Donner la définition d'une fonction convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Exercice n°1

On considre l'équation différentielle $(E) \qquad xy' + y = e^x$.

1) Déterminer les solutions de (E) sur $]-\infty, 0[$ ainsi que sur $]0, +\infty[$.

2) Y a-t-il des solutions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?

Exercice n°2

Soient $a \geq 2$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-(\frac{x}{a})^2}$.

1) Calculer f' et f''. En déduire la valeur de $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)|$.

Montrer que $M \leq \frac{1}{2}$ (on donne $1,6 \leq \sqrt{e} \leq 1,7$ et $1,4 \leq \sqrt{2} \leq 1,5$).

2) On pose $u_0 = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
En déduire que les suites $(u_{2p})_{p \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2p+1})_{p \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

b) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

Exercice n°3

Les deux questions sont indépendantes

Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite finie ℓ en $+\infty$.

1) **a)** Montrer que f est bornée.

b) Montrer que f est uniformément continue.

2) On suppose que f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que $f(1) = \ell$. Soit $g : [0, 1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(\frac{1}{1-x})$.

a) Justifier la continuité de g sur $[0, 1[$.

b) Comment prolonger g par continuité sur $[0, 1]$?

c) En déduire l'existence d'un c de $]1, +\infty[$ vérifiant $f'(c) = 0$.