UE 5 - MA4

Corrigé rapide du contrôle du 09 mars 2002

Questions de cours

1) Sous ces hypothèses, on dit que $-\infty$ est limite de f en $+\infty$ quand pour tout réel M, il existe un réel A tel que, pour tout x de $]0,+\infty[$ vérifiant $x > A$ on a $f(x) < M$:

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x > 0 \quad (x > A \Rightarrow f(x) < M)\ .$$

2) Sous ces hypothèses, les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. La fonction f est continue en a.
2. Pour toute suite de réels (u_n) telle que $\lim u_n = a$, on a $\lim f(u_n) = f(a)$.

3) La fonction f ayant un maximum local en x_0, par passage à la limite dans les inégalités on a

$$\lim_{h\to 0,\ h>0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{h\to 0,\ h<0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0.$$

Comme les deux limites sont égales à $f'(x_0)$, on a $f'(x_0) = 0$.

Exercice n°1

1)

a) La fonction $\varphi : x \mapsto \frac{1}{x} + a - 1$ est strictement décroissante sur $]0,1]$. Comme $\varphi(1) = a$, on a donc $\varphi(]0,1]) \subseteq [a,+\infty[$. f étant définie sur $[a,+\infty[$, la fonction composée F est bien définie sur $]0,1]$.

b) De mme, $\varphi : x \mapsto \frac{1}{x} + a - 1$ est continue sur $]0,1]$, $\varphi(]0,1]) \subseteq [a,+\infty[$ et f est continue sur $[a,+\infty[$ donc $F = f \circ \varphi$ est continue sur $]0,1]$.
$\varphi : x \mapsto \frac{1}{x} + a - 1$ est dérivable sur $]0,1[$, $\varphi(]0,1[) \subseteq]a,+\infty[$ et f est dérivable sur $]a,+\infty[$ donc $F = f \circ \varphi$ est dérivable sur $]0,1]$.

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} + a - 1 = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} f(X) = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} F(x) = 0$. F se prolonge donc par continuité en 0 : on pose $F(0) = 0$.

d) F est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$ et on a $F(0) = F(1) = 0$ (car $f(a) = 0$) donc le théorème de Rolle assure l'existence d'un C de $]0,1[$ tel que $F'(C) = 0$.

e) Or la dérivation des fonctions composées donne $\forall x \in]0,1[$, $F'(x) = \frac{-1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x} + a - 1\right)$. En posant $c = \dfrac{1}{C} + a - 1$, on a donc $c \in]a,+\infty[$ et $f'(c) = 0$.

2) Il suffit d'appliquer les résultats de la question précédente à la fonction f définie sur l'intervalle $[-a,+\infty[$ par : $f(x) = g(-x)$.

Exercice n°2

1) f étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, f' est continue sur $\mathbb{R}$ donc $|f'|$ est continue sur le segment $[a,b]$. Cette fonction est donc bornée sur ce segment (existence de M) et atteint ses bornes (existence de c).

2)

a) Ces deux inégalités sont une conséquence de l'inégalité des accroissements finis appliquée f (qui est dérivable car de classe C^1) sur $[a,x]$ puis sur $[x,b]$.

b) Comme $x \in [a,b]$, on a ou bien $a \leq x \leq \dfrac{a+b}{2}$ et $|x-a| \leq \dfrac{b-a}{2}$ ou bien $\dfrac{a+b}{2} \leq x \leq b$ et $|b-x| \leq \dfrac{b-a}{2}$. On a donc bien toujours $|f(x)| \leq M\dfrac{b-a}{2}$.