# DEUG Sciences 1er niveau - Mentions MASS, MIAS

UE 5 - MA4

## Contrôle du 09 mars 2002 - Durée 2 heures

*Tous les documents et calculettes sont interdits*

Barème indicatif : QC(7 pts), I (8 pts), II (5 pts)

### Questions de cours

**1)** Soit $f$ une fonction à valeurs réelles définie sur $]0,+\infty[$. Donner la définition de "$-\infty$ est limite de $f$ en $+\infty$".

**2)** On considère une fonction  valeurs réelles $f$ définie sur $\mathbb{R}$ et un point $a$ de $\mathbb{R}$. Donner une propriété portant sur les suites qui soit équivalente  la continuité de $f$ en $a$.

**3)** Soient $f$ une fonction  valeurs réelles définie sur $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose $f$ dérivable en $x_0$. Donner une démonstration de la propriété affirmant que "si $f$ a un maximum local en $x_0$, alors $f'(x_0) = 0$".

### Exercice n°1

**1)** Soient $a$ un réel et $f$ une fonction continue sur l'intervalle $[a,+\infty[$, dérivable sur l'intervalle $]a,+\infty[$ et qui vérifie $f(a) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
Soit $F : ]0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(\frac{1}{x} + a - 1)$.

- **a)** Justifier que $F$ est bien définie sur $]0,1]$.
- **b)** Montrer que $F$ est continue sur $]0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$.
- **c)** Montrer que $F$ est prolongeable par continuité sur $[0,1]$. On notera encore $F$ la fonction ainsi prolongée.
- **d)** Montrer que $F'$ s'annule en au moins un point de $]0,1[$.
- **e)** En déduire que $f'$ s'annule en au moins un point de $]a,+\infty[$.

**2)** Soit $g$ une fonction continue sur l'intervalle $]-\infty,a]$, dérivable sur l'intervalle $]-\infty,a[$ et telle que $g(a) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$. Montrer que $g'$ s'annule en au moins un point de l'intervalle $]-\infty,a[$. *(On pourra appliquer le résultat de la question 1.  une fonction $f$ bien choisie)*

### Exercice n°2

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}$. On suppose que $a < b$ et que $f(a) = f(b) = 0$.

**1)** Justifier l'existence du réel $M = \operatorname*{Sup}\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$. Montrer que l'on peut trouver un $c$ de $[a,b]$ tel que $M = |f'(c)|$.

**2)** Soit $x$ dans $[a,b]$.

- **a)** Montrer que $|f(x)| \le M\,|x-a|$ et que $|f(x)| \le M\,|b-x|$.
- **b)** En déduire que $|f(x)| \le M\dfrac{b-a}{2}$.