DEUG Sciences 1er niveau - Mentions MASS, MIAS

UE 5 - MA4

Corrigé rapide du contrôle du 24 mars 2001

Questions de cours

1) Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur $D_f \subset \mathbb{R}$. On suppose que D_f contient un intervalle $]b, a[$. On dit que $-\infty$ est limite à gauche de f en a quand pour tout réel M, il existe un réel $\delta > 0$, tel que, pour tout x de D_f vérifiant $a - \delta < x < a$, on a $f(x) < M$:

$$\forall M, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, \quad (a - \delta < x < a \Rightarrow f(x) < M)\ .$$

2) Soit f une fonction à valeurs réelles, croissante et majorée sur l'intervalle $]a, +\infty[$. Puisque f est majorée sur $]a, +\infty[$, elle a une borne supérieure M sur cet intervalle. Donnons nous $\epsilon > 0$. $M - \varepsilon$ n'étant pas un majorant, il existe c dans $]a, +\infty[$ tel que $f(c) > M - \epsilon$. On voit alors que pour tout x dans $[c, +\infty[$, on a $M - \epsilon < f(x) \leq M$. Ceci montre que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = M$.

3) Soit f une fonction réelle définie et continue sur le segment $[a, b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ (avec $a < b$). Si $f(a) = f(b) = 0$, alors (théorème de Rolle) il existe c appartenant à $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice n°1

1)a) f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x, f''(x) = +e^{-x} > 0$ donc f est convexe sur $\mathbb{R}$. D'autre part, pour $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,1]$, $g(tx + (1-t)y) = |tx + (1-t)y| \leq |tx| + |(1-t)y|$ c'est à dire $g(tx + (1-t)y) \leq t\,|x| + (1-t)\,|y| = tg(x) + (1-t)g(y)$ donc g est convexe sur $\mathbb{R}$.

b) $h(0) = 1$ et $\frac{1}{2}(h(1) + h(-1)) = \frac{1}{e} < 1$ donc $h(\frac{1}{2}1 + (1 - \frac{1}{2})(-1)) > \frac{1}{2}h(1) + (1 - \frac{1}{2})h(-1)$ et h n'est donc pas convexe sur $\mathbb{R}$.

2)a) L'exemple précédent montre qu'en général h n'est pas convexe.

b) Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,1]$. Comme g est convexe, $g(tx + (1-t)y) \leq tg(x) + (1-t)g(y)$. f étant croissante, on en déduit : $f \circ g(tx + (1-t)y) \leq f[tg(x) + (1-t)g(y)]$ et finalement, puisque f est convexe, $f \circ g(tx + (1-t)y) \leq tf \circ g(x) + (1-t)f \circ g(y)$.

Exercice n°2

Soient $n \geq 1$ un entier et P un polynôme de degré n vérifiant $P(0) = 0$ et $P'(0) > 0$. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = P(x)e^{-|x|}$.

1) $x \mapsto -|x|$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et $x \mapsto e^x$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ donc $x \mapsto e^{-|x|}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$. Une fonction polynôme étant de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, on déduit : f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.
$x \mapsto -|x|$ étant continue en 0, il en est de même de f. D'autre part,

$$f'(x) = \begin{cases} (P'(x) - P(x))e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ (P'(x) + P(x))e^{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

donc $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = P'(0) - P(0)$ et $\lim_{x \to 0^-} f'(x) = P'(0) + P(0)$. Comme $P(0) = 0$, ces deux limites sont identiques et on peut conclure : f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $f'(0) = P'(0)$.

2) De même, $f''(x) = \left\{ (P''(x) + 2P'(x) + P(x))e^x \quad \text{si } x < 0 \right.$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f''(x) = P''(0) - 2P'(0) +$ $P(0)$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} f''(x) = P''(0) + 2P'(0) + P(0)$. Comme $P'(0) \neq 0$, ces deux limites sont distinctes et f n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

3) La croissance comparéee des fonctions puissances et exponentielle permet d'affirmer $\lim\limits_{x \to \pm\infty} x^n e^{-|x|} = 0$ (pour tout entier naturel n) et donc $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$.
On en déduit l'existence d'un réel A tel que $|x| > A \Longrightarrow |f(x)| < 1$. Comme f est continue sur le segment $[-A, A]$, elle est également bornée sur ce segment et f est donc bien bornée sur $\mathbb{R}$.
On montre de même que f' est bornée sur $\mathbb{R}$.

4) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Le résultat est clair si $x = y$. Supposons donc $x \neq y$ (par exemple $x < y$). f est continue sur $[x, y]$, dérivable sur $]x, y[$ donc (théorème des accroissements finis) on peut écrire $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$ et donc $|f(x) - f(y)| = |f'(c)|\,|x - y| \leq M_1\,|x - y|$.
f est alors M_1-lipschitzienne donc uniformément continue sur $\mathbb{R}$: $\varepsilon > 0$ étant donné, $|x - y| < \dfrac{\varepsilon}{M_1}$ entraîne $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

5) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = P'(0) < 0$ donc, par continuité, f est strictement négative sur un petit intervalle $]0, h[$.
Soit $\alpha > 0$ tel que $f(\alpha) < 0$. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, f prend des valeurs supérieures à $\dfrac{f(\alpha)}{2}$ sur $]\alpha, +\infty[$ et donc aussi la valeur $\dfrac{f(\alpha)}{2}$ (théorème des valeurs intermédiaires). Cette valeur étant également prise sur $]0, \alpha[$ (TVI), le théorème de Rolle assure l'existence de $x_1 > 0$ tel que $f'(x_1) = 0$.
On raisonne de même "à gauche" de 0 : $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x)}{x} = P'(0) < 0$ donc, par continuité, f est strictement positive sur un petit intervalle $]-h, 0[$. Soit $\beta < 0$ tel que $f(\beta) > 0$. Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, f prend des valeurs inférieures à $\dfrac{f(\beta)}{2}$ sur $]-\infty, \beta[$ et donc aussi la valeur $\dfrac{f(\beta)}{2}$ (TVI). Cette valeur étant également prise sur $]\beta, 0[$ (TVI), on déduit l'existence de $x_2 < 0$ tel que $f'(x_2) = 0$.