DEUG Sciences 1er niveau - Mentions MASS, MIAS

UE 5 - MA4

Contrôle du 24 mars 2001 - Durée 2 heures

Tous les documents et calculettes sont interdits

Barème indicatif : QC(6 pts), I (5 pts), II (9 pts)

Questions de cours

1) Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur $D_f \subset \mathbb{R}$. On suppose que D_f contient un intervalle $]b, a[$. Quand dit-on que $-\infty$ est limite à gauche de f en a ?

2) Soit f une fonction à valeurs réelles, croissante et majorée sur l'intervalle $]a, +\infty[$. Montrer que f a une limite en $+\infty$.

3) Enoncer le théorème de Rolle.

Exercice n°1

1) a) Montrer que les fonctions $f : x \mapsto e^{-x}$ et $g : x \mapsto |x|$ sont convexes sur $\mathbb{R}$.

b) Soit $h : x \mapsto e^{-|x|}$. Vérifier que $h(0) > \frac{1}{2}(h(1) + h(-1))$. h est-elle convexe sur $\mathbb{R}$?

2) Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexes. On pose $h = f \circ g$.

a) Peut-on affirmer que h est convexe sur $\mathbb{R}$?

b) On suppose en outre f croissante sur $\mathbb{R}$. Montrer que h est convexe sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°2

Soient $n \geq 1$ un entier et P un polynôme de degré n vérifiant $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = P(x)e^{-|x|}$.

1) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2) f est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}$?

3) Vérifier que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. En déduire que f est bornée sur $\mathbb{R}$.
Montrer de même que f' est bornée sur $\mathbb{R}$.
On notera $M_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|$.

4) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $|f(x) - f(y)| \leq M_1 |x - y|$. f est-elle uniformément continue sur $\mathbb{R}$?

5) On suppose par exemple $P'(0) < 0$. Montrer qu'il existe un intervalle $]0, h[$ (resp. $]-h, 0[$) sur lequel f est strictement négative (resp. positive). En déduire l'existence de deux points distincts x_1 et x_2 tels que $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$.