Corrigé rapide du contrôle du 25 mars 2000

Questions de cours (6 points)

1) On dit que f *est uniformément continue sur I* quand pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que pour tous x et x' dans I, si $|x - x'| < \delta$, alors $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, x' \in I,\ |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

2) On considère la fonction g définie sur $[a, b]$ par $g(x) = x - f(x)$.
g est continue, et on a $g(a) \leq 0 \leq g(b)$. Donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe c dans $[a, b]$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire $f(c) = c$.

3) Sous ces hypothèses, f est *concave* donc en particulier, pour tout t de $[0, 1]$, on a : $f(ta + (1 - t)b) \geq tf(a) + (1 - t)f(b) = 0$. C'est à dire : $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \geq 0$.

Exercice n°1 (7 points)

1) f est clairement continue sur $\mathbb{R}^*$ et comme $\lim\limits_{x\to 0}(\lambda e^{-3x} - 1) = \lambda - 1$, une condition nécessaire pour que f ait une limite <u>finie</u> en 0 est $\lambda = 1$. Pour cette valeur de λ, on calcule cette limite en écrivant $e^{-3x} = 1 - 3x + x\varepsilon(x)$ (DL) ou en appliquant la règle de l'Hospital : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-3e^{-3x}}{1} = -3 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-3x} - 1}{x}$.
On trouve donc qu'il faut poser $f(0) = -5$.

2) On étudie de mme la limite en 0 de $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ en écrivant $e^{-3x} = 1 - 3x + \frac{9}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ ou en appliquant deux fois la règle de l'Hospital. On trouve $f'(0) = \frac{15}{2}$.

3) L'équation sans second membre est $xy' + (3x + 1)y = 0$ qui admet pour solution (sur tout intervalle ne contenant pas 0), $y = \lambda \dfrac{e^{-3x}}{x}$. On cherche alors une solution particulière sous la forme $y(x) = \lambda(x)\dfrac{e^{-3x}}{x}$ (méthode de la variation de la constante) ce qui conduit à $\lambda'(x) = e^{3x}(9x^2 - 5)$ et donc, par deux intégrations par parties successives, à la solution particulière $y(x) = -\frac{1}{x} + 3x - 2$. Les solutions de (E) sur $]-\infty, 0[$ (de mme sur $]0, +\infty[$) sont donc les fonctions de la forme $y : x \mapsto \lambda\dfrac{e^{-3x}}{x} - \dfrac{1}{x} + 3x - 2$.

Ce qui précède montre qu'une solution g sur $\mathbb{R}$ est de la forme $g(x) = \begin{cases} \lambda_1 \dfrac{e^{-3x}}{x} - \dfrac{1}{x} + 3x - 2 \text{ si } x < 0 \\ \lambda_2 \dfrac{e^{-3x}}{x} - \dfrac{1}{x} + 3x - 2 \text{ si } x > 0 \end{cases}$

La continuité de g en 0 impose alors d'après la première question $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. La fonction ainsi obtenue est f qui est dérivable en 0 et qui est donc l'unique solution cherchée.
On vérifie que f est bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ en montrant que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$.

Exercice n°2 (7 points)

1) On suppose f paire. f' est alors impaire (il suffit de dériver l'identité $\forall x$, $f(x) = f(-x)$ pour s'en convaincre). On a alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $F(-t) = 2f(-t) + tf'(-t) = 2f(t) - tf'(t) = F(t)$ donc F est paire.

2)

a) $t \mapsto t^2$ est dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$ et $t \mapsto f(t) - f(-t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme somme et composée de fonctions de classe C^2 donc h est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (comme quotient).
On a : $\forall x \neq 0$, $h'(t) = \dfrac{[f'(t) + f'(-t)]t^2 - 2t[f(t) - f(-t)]}{t^4} = \dfrac{F(-t) - F(t)}{t^3} = 0$.

b) h est dérivable sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ et sa dérivée est nulle donc h est constante sur chacun de ces intervalles. Soient donc $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\forall t > 0$, $f(t) - f(-t) = k_1 t^2$ et $\forall t < 0$, $f(t) - f(-t) = k_2 t^2$. f étant de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, on obtient en dérivant deux fois $\forall t > 0$, $f''(t) - f''(-t) = 2k_1$ et $\forall t < 0$, $f''(t) - f''(-t) = 2k_2$. La continuité de f'' en 0 assure alors que $k_1 = k_2 = 0$. On obtient donc $\forall t \neq 0, f(-t) = f(t)$, identité qui est bien sr vraie pour $t = 0$. f est donc bien paire.