DEUG Sciences 1er niveau - Mentions MASS, MIAS

UE 5 - MA4

Contrôle du 25 mars 2000 - Durée 2 heures

Tous les documents et calculettes sont interdits

Barème indicatif : QC(6 pts), I (7 pts), II (7 pts)

Questions de cours

1) Donner la <u>définition</u> d'une fonction uniformément continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

2) Soit f une fonction continue de $[a,b]$ dans $[a,b]$. Montrer qu'il existe c dans $[a,b]$ tel que $f(c)=c$.

3) Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ deux fois dérivable. On suppose que $\forall x\in[a,b]$, $f''(x)\leq 0$ et que $f(a)=f(b)=0$.
Montrer que : $\forall x\in[a,b]$, $f(x)\geq 0$.

Exercice n°1

1) Soit $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $x\mapsto \lambda\dfrac{e^{-3x}}{x}-\dfrac{1}{x}+3x-2$ où λ est une constante réelle.

a) Déterminer λ pour que f soit prolongeable par continuité en 0.

b) Montrer que ce prolongement est dérivable en 0 et préciser la valeur de la dérivée en 0.

2) Montrer que l'équation $xy'+(3x+1)y=9x^2-5$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ et la préciser.
Cette solution est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?

Exercice n°2

Soit f une fonction réelle de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On considère $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $F(t)=2f(t)-tf'(t)$.

1) Montrer que si f est paire alors F l'est aussi.

2) On suppose à présent F paire et on pose, pour tout réel t non nul, $h(t)=\dfrac{f(t)-f(-t)}{t^2}$.

a) Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que pour tout t non nul $h'(t)=0$.

b) En déduire que f est paire.