Université de Rennes 1 1998-1999

DEUG Sciences 1er niveau - Mentions MASS, MIAS

UE 5 - MA4

Corrigé rapide de l'examen du 3 juin 1999

Questions de cours

1) On dit que $f(x)$ *est équivalent à* $g(x)$ *quand* x *tend vers* a quand il existe une fonction h telle que $f = gh$ et que $\lim_{x\to a} h(x) = 1$. Si g ne s'annule pas au voisinage de a, sauf peut-être en a, ceci revient à dire que $\lim\limits_{x\to a}(f(x)/g(x)) = 1$. On note $f(x) \underset{x\to a}{\simeq} g(x)$.

2) Soient $a < b$ deux réels. Soit f une fonction réelle qui a des dérivées à l'ordre n sur $[a,b]$, telle que $f^{(n)}$ est continue sur $[a,b]$ et que $f^{(n+1)}$ existe sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in\,]a,b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$

Exercice n°1

Par définition de la limite (choix de $\varepsilon = 1$), $\exists A > 1, \forall x \geq A, |f(x) - \ell| < 1$ donc en particulier $\forall x \in [A, +\infty[, |f(x)| \leq |\ell|+1$. D'autre part, f est continue sur le segment $[1, A]$ donc est bornée. Il existe donc un réel M tel que $\forall x \in [1, A], |f(x)| < M$. Finalement, $\forall x \in [1, +\infty[, |f(x)| \leq \mathrm{Max}\{M, |\ell| + 1\}$ et f est bien bornée.

Exercice n°2

1) Φ est une fraction rationnelle de classe C^∞ sur I et on a : $\forall x \in I,\ \Phi'(x) = \dfrac{f''(x)f(x)}{f'(x)^2} = \dfrac{2(x^2-x-1)}{(2x-1)^2}$.

Le calcul de Φ'' en découle : $\forall x \in I,\ \Phi''(x) = \dfrac{10}{(2x-1)^3}$.

2) On en déduit de manière immédiate : $\Phi(\alpha) = \alpha - \dfrac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \alpha$ et $\Phi'(\alpha) = \dfrac{f''(\alpha)f(\alpha)}{f'(\alpha)^2} = 0$.

3) On remarque tout d'abord que $f(\frac{3}{2}) = -\frac{1}{4} < 0$ et $f(2) = +1 > 0$ donc $\alpha \in [\frac{3}{2}, 2]$. L'expression de Φ' montre alors que Φ est décroissante sur $[\frac{3}{2}, \alpha]$ et croissante sur $[\alpha, 2]$ avec $\Phi(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2} + \frac{1}{8} = \frac{13}{8}$ et $\Phi(2) = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$. Donc $\Phi(I) = [\frac{13}{8}, \frac{5}{3}] \subset I$.

D'autre part, Φ'' est positive sur I donc Φ' est croissante sur I et on a :

$\forall x \in I,\ -\dfrac{1}{8} = \Phi'(\dfrac{3}{2}) \leq \Phi'(x) \leq \Phi'(2) = \dfrac{2}{9}$ donc $|\Phi'(x)| \leq \dfrac{1}{2} < 1$. Φ est donc contractante sur I.

4) On a $\Phi(I) \subset I$, Φ est contractante sur I et $v_0 \in I$ donc (théorème des fonctions contractantes) la suite récurrente (v_n) converge vers l'unique point fixe de Φ sur I : α.

5) D'après l'inégalité des accroissement finis (et compte tenu de la majoration de $|\Phi'|$ obtenue), on a pour tout entier n : $|v_{n+1} - \alpha| = |\Phi(v_n) - \Phi(\alpha)| \leq \frac{1}{2}\,|v_n - \alpha|$ et donc, par une récurrence immédiate, $|v_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^n\,|v_0 - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^{n+1}$. Pour avoir $|\alpha - v_n| \leq 10^{-3}$, il suffit donc d'avoir $(\frac{1}{2})^{n+1} \leq 10^{-3}$ c'est à dire $2^{n+1} \geq 1000$. On prend donc $n = 9$.

Exercice n°3

1) On a $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)$ donc $\sin(\dfrac{\pi}{3}\cos x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{3}\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{\pi}{3}\dfrac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)\right)$ donc $\sin(\frac{\pi}{3}\cos x) = \sin\dfrac{\pi}{3}\cos g(x) + \cos\dfrac{\pi}{3}\sin g(x)$ où $g(x) = -\dfrac{\pi}{3}\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{\pi}{3}\dfrac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)$.

Or on a $\cos X = 1 - \dfrac{X^2}{2} + \dfrac{X^4}{24} + X^4\varepsilon(X)$ et $\sin X = X - \dfrac{X^3}{6} + X^4\varepsilon(X)$. Comme $g(0) = 0$ on en déduit (par substitution) $\cos g(x) = 1 - \dfrac{\pi^2}{72}x^4 + x^4\varepsilon(x)$ et $\sin g(x) = -\dfrac{\pi}{6}x^2 + \dfrac{\pi}{72}x^4 + x^4\varepsilon(x)$.

Après addition, on obtient finalement : $\sin(\dfrac{\pi}{3}\cos x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\pi}{12}x^2 + \dfrac{\pi - \sqrt{3}\pi^2}{144}x^4 + x^4\varepsilon(x)$.

2) Une fonction f de classe C^∞ admet des développements limités en 0 à tout ordre, le coefficient de x^k étant $\dfrac{g^{(k)}(0)}{k!}$ pour tout naturel k.

Dans cette question, g est en outre une fonction impaire donc tous les termes d'ordre pair de son développement limité en 0 sont nuls. En particulier, $\dfrac{g^{(2022)}(0)}{2022!} = 0$ donc $g^{(2022)}(0) = 0$.

3) Soit $N \geq 1$. On sait que $\ell n(1+x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k + x^N\varepsilon(x)$ donc $h(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{k+1}}{k}x^{k+7} + x^{N+7}\varepsilon(x)$.

Le coefficient de x^{4119} dans le développement de h (qui correspond à $k = 4119 - 7 = 4112$) est donc $\dfrac{-1}{4112}$. Ce coefficient étant d'autre part égal à $\dfrac{h^{(4119)}(0)}{4119!}$, on déduit : $h^{(4119)}(0) = -\dfrac{4119!}{4112}$.