DEUG Sciences 1er niveau - Mentions MASS, MIAS

UE 5 - MA4

Examen du 3 juin 1999 - Durée 2 heures

Tous les documents et calculettes sont interdits

Barème indicatif : QC(4 pts), I (2 pts), II (8 pts), III (6 pts)

Question de cours

1) Soient f et g deux fonctions réelles définies sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et soit $a \in I$.
Donner la définition du fait que $f(x) \sim g(x)$ quand x tend vers a.

2) Enoncer le théorème de Taylor-Lagrange.

Exercice n°1

Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite finie ℓ en $+\infty$. Montrer que f est bornée.

Exercice n°2

Soit α la racine positive du polynôme $f(x) = x^2 - x - 1$. Soient $I = [\frac{3}{2}, 2] \subset \mathbb{R}$ et $\Phi : I \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par la méthode de Newton. On rappelle que $\Phi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

1) Déterminer Φ' et Φ''.

2) Calculer $\Phi(\alpha)$ et $\Phi'(\alpha)$.

3) Montrer que $\Phi(I) \subset I$ et que Φ est contractante sur I.

4) Soit $(v_n)_{n \geq 0}$ la suite récurrente définie par $v_0 = \frac{3}{2}$ et $v_{n+1} = \Phi(v_n)$. Montrer que $\lim_{n \to \infty} v_n = \alpha$.

5) Trouver un indice n tel que $|\alpha - v_n| \leq 10^{-3}$.

Exercice n°3

Les trois questions sont indépendantes

1) Trouver le développement limité en 0 l'ordre 4 de la fonction f donnée par

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} \cos x\right)$$

2) Soit $g(x) = \sin(x^3)$. Trouver $g^{(2022)}(0)$ (ici, comme dans la question suivante, $g^{(n)}$ désigne la dérivée n-ème de la fonction g).

3) Soit $h(x) = x^7 \ln(1 + x)$. Trouver $h^{(4119)}(0)$.