Université de Rennes 1 2001-2002

DEUG Sciences 1er niveau - Mentions MASS, MIAS

UE 5 - MA4

Corrigé rapide de l'examen du 6 mai 2002

Questions de cours

1) On a $f(h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + h^2 \epsilon(h) = b_0 + b_1 h + b_2 h^2 + h^2 \varphi(h)$, donc, pour tout k de $\{0,1,2\}$,

$$\frac{(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)h + (a_2 - b_2)h^2}{h^k} = h^{2-k}(\varphi(h) - \varepsilon(h))$$

ce qui, en donnant successivement à k les valeurs $0,1,2$ et en faisant tendre h vers 0, entraîne $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ et donc aussi $\epsilon(h) = \varphi(h)$.

2) Soit f une fonction à valeurs réelles, définie et continue sur un intervalle I. Soient $a < b$ deux éléments de l'intervalle I. Soit ℓ un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe c dans le segment $[a,b]$ tel que $f(c) = \ell$.

Exercice n°1

Partie A.

1) f est dérivable sur $[0,1]$ et on a $f' : x \mapsto -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$.
On en déduit d'une part $\forall x \in [0,1]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}|\frac{x}{2}| \leq \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$ donc f est contractante sur $[0,1]$, et d'autre part $f([0,1]) = [f(1), f(0)] \subset [0,1]$. Un théorème du cours assure alors l'existence et l'unicité d'un point fixe pour f dans $[0,1]$.
On pouvait bien sûr aussi traiter cette question en étudiant la fonction $x \mapsto f(x) - x$. (Cette fonction réalise une bijection de $[0,1]$ dans $[\cos\frac{1}{2} - 1, 1]$.)

2) Voir question précédente. On a donc : $\forall x, y \in [0,1]$, $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$.

3) Comme $f([0,1]) \subset [0,1]$, par une récurrence immédiate, $\forall n$, $u_n \in [0,1]$ La question précédente permet alors d'écrire $|f(u_n) - f(\ell)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ell|$ c'est à dire $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ell|$.

4) Une récurrence permet alors d'établir que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leq \dfrac{1}{2^n}|u_0 - \ell| \leq \dfrac{1}{2^n}$. Pour que u_n soit une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près, **il suffit** alors que $\dfrac{1}{2^n} \leq 10^{-3}$. On peut donc choisir $n = 10$ ($4^5 = 1024$).

Partie B.

1)

a) Par définition, on a $\Phi : x \longmapsto x + 2\dfrac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$. Il est alors immédiat que Φ est de classe C^3 sur l'intervalle I (qui ne contient pas de point d'annulation de $\sin\frac{x}{2}$).

b) Pour tout x de I on a : $\Phi'(x) = -\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}$, $\Phi''(x) = \dfrac{\cos\frac{x}{2}}{\sin^3\frac{x}{2}}$ et $\Phi^{(3)}(x) = -\dfrac{1 + 2\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin^4\frac{x}{2}}$. On en déduit $\Phi(\pi) = \pi$ et $\Phi'(\pi) = \Phi''(\pi) = 0$.

2) Soit x dans I. On a alors $\frac{x}{2} \in [\frac{\pi}{3}, 2\frac{\pi}{3}]$ donc $-\frac{1}{2} \leq \cos\frac{x}{2} \leq \frac{1}{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin\frac{x}{2} \leq 1$. On a donc finalement $0 \leq \cos^2\frac{x}{2} \leq \frac{1}{4}$ et $\frac{9}{16} \leq \sin^4\frac{x}{2} \leq 1$. On en déduit $|\Phi^{(3)}(x)| = \dfrac{1 + 2\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin^4\frac{x}{2}} \leq \dfrac{1 + 2\frac{1}{4}}{2\frac{9}{16}} = \dfrac{4}{3}$.

3) On écrit la formule de Taylor-Lagrange pour Φ (qui est de classe C^3 sur I) à l'ordre 2 entre $x \in I$ et π. Il existe c entre π et x tel que

$$\Phi(x) = \Phi(\pi) + (x - \pi)\Phi'(\pi) + \frac{1}{2}(x - \pi)^2\Phi''(\pi) + \frac{1}{3!}(x - \pi)^3\Phi^{(3)}(c) = \pi + \frac{1}{6}(x - \pi)^3\Phi^{(3)}(c) .$$

4)

a) Φ' étant négative sur I, on a $\Phi(I) = [\Phi(\frac{4\pi}{3}), \Phi(\frac{2\pi}{3})] = [\frac{4\pi}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\pi}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}] \subset I$.

b) D'après a) et par une récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \in I$. Soit alors $n \in \mathbb{N}$. La question 3) (appliquée à $x = v_n$ qui est bien dans I) permet alors d'écrire : $\Phi(v_n) - \pi = \frac{1}{6}(v_n - \pi)^3 \Phi^{(3)}(c)$ et par suite, $|v_{n+1} - \pi| \leq |\frac{1}{6}\Phi^{(3)}(c)||v_n - \pi|^3$. Or $|\Phi^{(3)}(c)| \leq \frac{4}{3}$ et donc finalement, $|v_{n+1} - \pi| \leq \dfrac{2}{9}|v_n - \pi|^3$.

Exercice n°2

1) $x \mapsto \ell n\, x$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ et $\ell n\,(]1, +\infty[) =]0, +\infty[$. $x \mapsto \ell n\, x$ étant dérivable sur $]0, +\infty[$, on en déduit par composition que f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que l'on a :

$$\forall x > 1,\ f'(x) = \frac{1}{x \ell n\, x}$$

2) Soit $m \geq 2$ un entier. f est continue sur $[m, m+2]$ et dérivable sur $]m, m+2[$ donc (théorème des accroissements finis) il existe un réel c de $]m, m+2[$ tel que $f(m+2) - f(m) = (m+2-m)f'(c) = 2f'(c)$. Comme $c \in]m, m+2[$, on a $\ell n\, m \leq \ell n\, c \leq \ell n\,(m+2)$ (croissance de la fonction ℓn) et donc $m \ell n\, m \leq c \ell n\, c \leq (m+2) \ell n\,(m+2)$ (multiplication d'inégalités entre quantités positives puisque $\ell n\, m \geq \ell n\, 2 > 0$). On obtient finalement :

$$\frac{2}{(m+2)\ell n\,(m+2)} \leq f(m+2) - f(m) \leq \frac{2}{m\, \ell n\, m}$$

3) Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \{1, \cdots, n\}$.

La question précédente appliquée à $m = 2k$ donne $f(2k+2) - f(2k) \leq \dfrac{1}{k\, \ell n\, 2k}$.

Par sommation, on déduit :

$$u_n \geq \sum_{k=1}^{n} (f(2k+2) - f(2k)) = f(2n+2) - f(2)$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} f(2n+2) = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$.