Université de Rennes 1 2001-2002

DEUG Sciences 1er niveau - Mentions MASS, MIAS

UE 5 - MA4

Examen du Lundi 6 mai 2002 - Durée 2 heures

Tous les documents et calculettes sont interdits

Barème indicatif : QC(4 pts), I (10 pts), II (6 pts)

Questions de cours

1) Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle ouvert I contenant 0. On suppose que f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0. Montrer que ce développement est unique. Plus précisément, s'il existe des réels a_0, a_1, a_2 et b_0, b_1, b_2 tels que

$$f(h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + h^2 \epsilon(h) = b_0 + b_1 h + b_2 h^2 + h^2 \varphi(h),$$

avec $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = \lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$, montrer que, pour tout k de $\{0,1,2\}$ on a $a_k = b_k$.

2) Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice n°1

Dans tout l'exercice, f désigne la fonction réelle de la variable réelle définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(\frac{x}{2})$.
Les parties A et B sont très largement indépendantes.

Partie A.

1) Montrer que f admet sur $[0,1]$ un unique point fixe ℓ (que l'on ne cherchera pas à expliciter).

2) Montrer que f est contractante sur $[0,1]$.

3) En déduire que la suite récurrente définie par $u_0 \in [0,1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \cos\left(\frac{u_n}{2}\right)$ vérifie

$$|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ell|$$

4) Trouver un indice n permettant d'approcher ℓ par u_n à 10^{-3} près.

Partie B.

Soient $\Phi : x \mapsto x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ et $I = \left[\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right]$.

1) **a)** Montrer que Φ est de classe C^3 sur I.

b) Déterminer Φ' et Φ'' et montrer que $\forall x \in I$, $\Phi^{(3)}(x) = -\dfrac{1 + 2\cos^2 \frac{x}{2}}{2\sin^4 \frac{x}{2}}$. Donner les valeurs de $\Phi(\pi)$, $\Phi'(\pi)$ et $\Phi''(\pi)$.

2) Soit x dans I. Donner un encadrement de $\cos^2 \frac{x}{2}$ et de $\sin^4 \frac{x}{2}$. En déduire $|\Phi^{(3)}(x)| \leq \dfrac{4}{3}$.

3) Ecrire la formule de Taylor-Lagrange pour Φ à l'ordre 2, au voisinage de π.

4) **a)** Montrer que $\Phi(I) \subset I$.

b) On considère la suite (v_n) définie par $v_0 \in I$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \Phi(v_n)$. Déduire des questions précédentes que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|v_{n+1} - \pi| \leq \dfrac{2}{9}|v_n - \pi|^3$.

T. S. V. P.

Exercice n°2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \ell n\,(\ell n\, x)$.

1) Montrer que f est dérivable sur $]1, +\infty[$. Calculer f'.

2) Soit m un entier, $m \geq 2$. Appliquer le théorème des accroissements finis à f sur $[m, m+2]$. En déduire une majoration de la quantité $\ell n\,(\ell n\,(m+2)) - \ell n\,(\ell n\,(m))$.

3) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,\ell n\,(2k)}$ diverge vers $+\infty$.

(On pourra penser à minorer u_n.)