DEUG Sciences 1er niveau - Mentions MASS, MIAS

UE 5 - MA4

Corrigé rapide de l'examen du 30 mai 2001

Questions de cours

1) Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur $D_f \subset \mathbb{R}$. On suppose que D_f contient un intervalle $]b, a[$. On dit que $-\infty$ est limite à gauche de f en a quand pour tout réel M, il existe un réel $\delta > 0$, tel que, pour tout x de D_f vérifiant $a - \delta < x < a$, on a $f(x) < M$:

$$\forall M,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in D_f, \quad (a - \delta < x < a \Rightarrow f(x) < M)\ .$$

2) Soit f une fonction à valeurs réelles, définie et continue sur un intervalle I. Soient $a < b$ deux éléments de l'intervalle I. Soit ℓ un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe c dans le segment $[a, b]$ tel que $f(c) = \ell$.

Exercice n°1

1) **a)** On a de manière immédiate $1 + 2x + \cos x = 2 + 2x - \frac{1}{2}x^2 + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. D'autre part, $\ell n\,(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + t^3\varepsilon(t)$ avec $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

b) On en déduit $\ell n\,(1 + 2x + \cos x) = \ell n\, 2 + \ell n\, \left(1 + x - \frac{1}{4}x^2 + x^3\varepsilon(x)\right)$ soit

$$\ell n\,(1 + 2x + \cos x) = \ell n\, 2 + T_3\left((x - \frac{1}{4}x^2) - \frac{1}{2}(x - \frac{1}{4}x^2)^2 + \frac{1}{3}(x - \frac{1}{4}x^2)^3\right) + x^3\varepsilon(x)$$

et donc finalement :

$$\ell n\,(1 + 2x + \cos x) = \ell n\, 2 + x - \frac{3}{4}x^2 + \frac{7}{12}x^3 + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

2) On a $\sqrt{1+2x} = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + x^3\varepsilon(x)$ et on déduit $f(x) = \dfrac{\ell n\, 2 - 1 + a - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + x^3\varepsilon(x)}{x^2}$

a) f est prolongeable par continuité en 0 si f a une limite finie en 0. Cela nécessite déjà $\ell n\, 2 - 1 + a = 0$ (sinon la limite est infinie) mais alors $f(x) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{12}x + x\varepsilon(x)$ admet $-\frac{1}{4}$ pour limite en 0. Finalement f est prolongeable par continuité en 0 si et seulement si $a = 1 - \ell n\, 2$ et on a alors $f(0) = -\dfrac{1}{4}$.

b) Pour x non nul voisin de 0, on a alors : $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{1}{12} + \varepsilon(x)$ donc $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{1}{12}$. f est donc dérivable en 0 et $f'(0) = \dfrac{1}{12}$.

Exercice n°2

1) f est dérivable sur $]-\infty, 5[$ et $\forall x < 5$, $f'(x) = \dfrac{-1}{5-x} - 1 = \dfrac{-6+x}{5-x} < 0$. Comme $\lim_{-\infty} f = +\infty$ et $\lim_{5^+} f = -\infty$, f est une bijection strictement décroissante de $]-\infty, 5[$ dans $\mathbb{R}$. 0 a donc bien un unique antécédent par f. Comme $f(1) = 2\ell n\, 2 - 1 > 0$ et $f(2) = \ell n\, 3 - 2 < 0$, le théorème des valeurs intermédiaires assure : $r \in]1, 2[$.

a) De mme g est dérivable (donc continue) et strictement décroissante sur $[1,2]$. On a donc $g([1,2]) = [g(2), g(1)] \subset [1,2]$ car $g(1) = 2\ell n\, 2 \simeq 1,4$ et $g(2) = \ell n\, 3 \simeq 1,1$. D'autre part, pour tout x de $[1,2]$ on a $|g'(x)| = |\frac{-1}{5-x}| = \frac{1}{5-x} \leq \frac{1}{5-2} = \frac{1}{3}$.

b) D'après 1)a) et comme $u_0 = 1 \in [1,2]$, le théorème des fonctions contractantes assure que la suite (u_n) est définie et converge vers l'unique point fixe de g sur $[1,2]$ c'est à dire r. On a d'ailleurs pour $n \in \mathbb{N}$, d'après l'inégalité des accroissements finis, $|u_{n+1} - r| = |g(u_n) - g(r)| \leq \frac{1}{3}|u_n - r|$ et donc par une récurrence immédiate $|u_n - r| \leq \frac{1}{3^n}$ (puisque $|u_0 - r| \leq 1$).

3) On applique à présent la méthode de Newton à f ce qui revient à considérer la fonction $\Phi : [1,2] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

a) f' étant dérivable et ne s'annulant pas, Φ est dérivable, et sa dérivée vaut

$$\Phi'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = -\frac{f(x)}{(-6+x)^2}$$

On constate au passage que r est un point fixe de Φ et que $\Phi'(r) = 0$. Le signe de f se déduisant de 1)a), Φ est décroissante sur $[1,r]$ et croissante sur $[r,2]$. Comme $\Phi(1) = 1 + \frac{4}{5}(2\ell n\, 2 - 1) \in [1,2]$ et $\Phi(2) = 2 - \frac{3}{4}(2 - \ell n\, 3) \in [1,2]$, on a bien $\Phi([1,2]) \subset [1,2]$.

b) On écrit la formule de Taylor-Lagrange pour Φ à l'ordre 1 entre $x \in [1,2]$ et r. Il existe c entre r et x tel que

$$\Phi(x) = \Phi(r) + (x-r)\Phi'(r) + \frac{1}{2}(x-r)^2\Phi''(c) = r + \frac{1}{2}(x-r)^2\Phi''(c)\ .$$

c) Partant de $\Phi'(x) = -\frac{f(x)}{(-6+x)^2}$ on a $\Phi''(x) = -\frac{(-6+x)f'(x) - 2f(x)}{(-6+x)^3} = -\frac{\frac{(-6+x)^2}{5-x} - 2f(x)}{(-6+x)^3}$.
Comme $\sup\limits_{x\in[1,2]} f(x) \leq 1$ (cf 1a), une majoration grossière donne :

$$\forall x \in [1,2],\ |\Phi''(x)| \leq \frac{\frac{5^2}{3} + 2}{4^3} = k < 1$$

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $\Phi([1,2]) \subset [1,2]$, une récurrence immédiate prouve que $v_n \in [1,2]$. D'après 3)b) on a donc $\Phi(v_n) - r = \frac{1}{2}(v_n - r)^2\Phi''(c_n)$ et donc $|v_{n+1} - r| \leq \frac{k}{2}|v_n - r|^2$. Une récurrence simple montre alors que $|v_n - r| \leq \left(\frac{k}{2}\right)^{2^n - 1}$.