DEUG Sciences 1er niveau - Mentions MASS, MIAS

UE 5 - MA4

# Examen du Mercredi 30 mai 2001 - Durée 2 heures

*Tous les documents et calculettes sont interdits*

Barème indicatif : QC(4 pts), I (7 pts), II (9 pts)

## Questions de cours

**1)** Soit $f$ une fonction à valeurs réelles définie sur $D_f \subset \mathbb{R}$. On suppose que $D_f$ contient un intervalle $]b, a[$. Quand dit-on que $-\infty$ est limite à gauche de $f$ en $a$ ?

**2)** Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

## Exercice n°1

**1)**
**a)** Trouver le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto 1 + 2x + \cos x$. Rappeler celui de $t \mapsto \ell n\,(1+t)$ (en 0, au mme ordre).

**b)** En déduire le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \ell n\,(1 + 2x + \cos x)$.

**2)** Soit $f : x \mapsto \dfrac{\ell n\,(1 + 2x + \cos x) - \sqrt{1+2x} + a}{x^2}$ où $a$ est un réel.

**a)** Déterminer le réel $a$ pour que $f$ soit prolongeable par continuité en 0.

**b)** Le prolongement ainsi obtenu est-il dérivable en 0 ?

## Exercice n°2

On se propose d'approximer le réel $r$ vérifiant $\ell n\,(5 - r) = r$. On rappelle que $\ell n\, 2 \simeq 0,7$ et $\ell n\, 3 \simeq 1,1$.

**1)** En étudiant rapidement la fonction $f : ]-\infty, 5[ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ell n\,(5 - x) - x$, montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $r$. Montrer que $r \in ]1, 2[$.
*On citera avec précision les théorèmes utilisés.*

**2)** Soit $g : ]-\infty, 5[ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ell n\,(5 - x)$.

**a)** Montrer que $g([1,2]) \subset [1,2]$ et que pour tout $x$ de $[1,2]$ on a $|g'(x)| \leq \frac{1}{3}$.

**b)** On pose $u_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$. Montrer que la suite $(u_n)$ est définie et converge vers $r$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - r| \leq \frac{1}{3^n}$.

**3)** On applique à présent la méthode de Newton à $f$ ce qui revient à considérer la fonction $\Phi : [1,2] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

**a)** Vérifier que $\Phi'(x) = \dfrac{f(x) f''(x)}{f'(x)^2}$ et que $\Phi([1,2]) \subset [1,2]$.

**b)** Ecrire la formule de Taylor-Lagrange pour $\Phi$ à l'ordre 1 au voisinage de $r$.

**c)** Calculer $\Phi''(x)$. A l'aide d'une majoration grossière, trouver $k < 1$ tel que $\forall x \in [1,2]$, $|\Phi''(x)| \leq k$.

**d)** On pose $v_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \Phi(v_n)$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|v_n - r| \leq \left(\frac{k}{2}\right)^{2^n - 1}$.