Université de Rennes 1 1999-2000

DEUG Sciences 1er niveau - Mentions MASS, MIAS

UE 5 - MA4

Corrigé rapide de l'examen du 30 mai 2000

Questions de cours

1) On dit que $f(x)$ *est équivalent à* $g(x)$ *quand* x *tend vers* 0 quand il existe une fonction $h(x)$ telle que $f(x) = g(x)h(x)$ et que $\lim_{x\to 0} h(x) = 1$. Si g ne s'annule pas au voisinage de 0, sauf peut-être en 0, ceci revient à dire que $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)/g(x)) = 1$. On note $f(x) \underset{x\to 0}{\simeq} g(x)$.

2) Soit f une fonction réelle définie et continue sur le segment $[a,b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ (avec $a < b$). Il existe c appartenant à $]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Exercice n°1

1) **a)** On a $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$ et $e^X = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{6} + X^3\varepsilon(X)$ donc par composition, $e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

b) On en déduit $\ell\text{n}\ \left(3 + e^{\sin x}\right) = \ell\text{n}\ 4 + \ell\text{n}\ \left(1 + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + x^3\varepsilon(x)\right)$ et comme $\ell\text{n}\ (1+X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + X^3\varepsilon(X)$, $\ell\text{n}\ \left(3 + e^{\sin x}\right) = \ell\text{n}\ 4 + \frac{x}{4} + \frac{3x^2}{32} - \frac{5}{192}x^3 + x^3\varepsilon(x)$.

c) On a également $\sin(x^2) = x^2 + x^3\varepsilon(x)$ donc $\dfrac{4\ell\text{n}\ \left(3 + e^{\sin x}\right) - 8\ell\text{n}\ 2 - x}{\sin(x^2)} = \dfrac{\frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{48}x^3 + x^3\varepsilon(x)}{x^2 + x^3\varepsilon(x)}$ et finalement $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\ell\text{n}\ \left(3 + e^{\sin x}\right) - 8\ell\text{n}\ 2 - x}{\sin(x^2)} = \dfrac{3}{8}$.

2) Pour $x \neq 0$, on a $f(x) = x(1+\frac{1}{x})^{\frac{1}{3}} = x\left(1 + \frac{1}{3}\frac{1}{x} - \frac{1}{9}\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon(x)\right)$ soit $f(x) = x + \frac{1}{3} - \frac{1}{9}\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to\infty}\varepsilon(x) = 0$. La droite d'équation $y = x + \frac{1}{3}$ est donc asymptote à la courbe. La position relative est donnée par le signe de $f(x) - (x + \frac{1}{3})$: la courbe est au dessus de son asymptote au voisinage de $-\infty$ et au dessous au voisinage de $+\infty$.

Exercice n°2

1) f est paire, dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x, $f'(x) = \dfrac{2x}{(2+x^2)^2}$ Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$, on déduit : $f(\mathbb{R}) = [\frac{1}{2}, 1[$.

2) On a $\forall x \in [\frac{1}{2}, 1]$, $|f'(x)| \leq \dfrac{2}{(2+\frac{1}{4})^2} \leq \dfrac{1}{2}$ donc f est contractante sur $[\frac{1}{2}, 1]$.

3) On a $f([\frac{1}{2}, 1]) \subset [\frac{1}{2}, 1]$, f contractante sur $[\frac{1}{2}, 1]$ et $u_1 = f(u_0) \in [\frac{1}{2}, 1]$. Le théorème des fonctions contractantes assure alors que la suite (u_n) converge vers l'unique point fixe de f sur $[\frac{1}{2}, 1]$.

4) L'inégalité des accroissements finis et la majoration obtenue au 2) conduisent alors à : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)|u_n - \ell|$ et donc, à l'aide d'une récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n - \ell| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}|u_1 - \ell| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. Pour avoir $|u_N - \ell| < 10^{-3}$, il suffit donc d'avoir $\dfrac{1}{2^N} \leq 10^{-3}$ c.a.d. $N \geq \dfrac{3\ell\text{n}\ 10}{\ell\text{n}\ 2}$. On prend donc $N = 10$.

5) f a un unique point fixe sur $[\frac{1}{2}, 1]$ et si ℓ est un point fixe de f, on a $\ell = f(\ell)$ donc $\ell \in f(\mathbb{R}) = [\frac{1}{2}, 1[$ donc f admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}$.