DEUG Sciences 1er niveau - Mentions MASS, MIAS

UE 5 - MA4

Examen du 30 mai 2000 - Durée 2 heures

Tous les documents et calculettes sont interdits

Barème indicatif : QC(4 pts), I (7 pts), II (9 pts)

Questions de cours

1) Soient f et g des fonctions réelles définies sur un voisinage de 0. Que signifie l'expression "f est équivalente à g au voisinage de 0" (que l'on abrège souvent en "$f(x) \sim g(x)$") ?

2) Enoncer le théorème des accroissements finis.

Exercice n°1

Les deux questions sont indépendantes

1)

a) Trouver le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $e^{\sin x}$.

b) En déduire celui de $\ell\text{n}\ \left(3+e^{\sin x}\right)$.

c) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{4\ell\text{n}\ \left(3+e^{\sin x}\right) - 8\ell\text{n}\ 2 - x}{\sin(x^2)}$.

2) Trouver les asymptotes pour $x \to \pm\infty$ de la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x^3+x^2}$ et déterminer la position relative du graphe par rapport aux asymptotes.

Exercice n°2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1+x^2}{2+x^2}$.

Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit la suite (u_n) par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \geq 0$.

1) Montrer que $f(\mathbb{R}) = [\frac{1}{2}, 1[$.

2) Montrer que f est contractante sur $[\frac{1}{2}, 1]$.

3) En déduire que (u_n) converge (quel que soit le réel a).

4) Soit $\ell = \displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n$. Trouver un entier N tel que $|u_N - \ell| < 10^{-3}$. (On ne demande pas de déterminer ℓ.)

5) Montrer que f admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}$.