# GEEU : Feuille d'exercices n°5

## Exercices du cours

**1)** Montrer que la parabole $\Gamma$ de directrice $\mathcal{D}$ et de foyer $F$ est le lieu des centres des cercles tangents à $\mathcal{D}$ et passant par $F$.

**2)** Montrer qu'une parabole n'a pas de centre de symétrie.

**3)** Montrer que dans un repère orthonormé, toute courbe d'équation $y = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ est une parabole.

**4)** Montrer que les tangentes à une parabole $\mathcal{P}$ sont exactement les droites non parallèles à l'axe focal qui coupent $\mathcal{P}$ en un seul point.

**5)** Montrer que la tangente à une parabole en un point $M$ est la médiatrice du segment $[FH]$ (où $H$ est le projeté orthogonal de $M$ sur la directrice). Montrer également que si $M$ n'est pas sur l'axe focal alors cette tangente est aussi la hauteur issue de $M$ dans le triangle $FMH$ ainsi que la bissectrice intérieure de l'angle en $M$. Quelles en sont les conséquences pratiques ?

**6)** Donner une représentation paramétrique rationnelle de l'ellipse d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ privée de son sommet $A'(-a, 0)$.

**7)** Montrer que la tangente à une ellipse en un point $M$ est la bissectrice extérieure de l'angle en $M$ dans le triangle $MFF'$.

**8)** Donner une représentation paramétrique rationnelle de l'hyperbole.

**9)** Montrer que la tangente à une hyperbole en un point $M$ est la bissectrice intérieure de l'angle en $M$ dans le triangle $MFF'$.

## Exercice n°1

Soit $\mathcal{C}$ une conique de foyer $F$ et de directrice associée $\mathcal{D}$. On considère deux points de $\mathcal{C}$, $M \neq M'$ alignés avec $F$. Montrer que les tangentes à $\mathcal{C}$ en $M$ et $M'$ se coupent sur $D$ ou sont parallèles.

## Exercice n°2

Soit $\Gamma$ une conique d'excentricité $e$, de foyer $F$ et de directrice associée $\mathcal{D}$. Montrer que la tangente en tout point de $\Gamma$ non situé sur l'axe focal coupe la directrice en un point $T$ tel que $(FM) \perp (FT)$.

## Exercice n°3

Montrer que les tangentes à une ellipse sont les droites qui coupent cette ellipse en un unique point. Est-ce aussi le cas pour une hyperbole ?

## Exercice n°4

Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de sommets $A, A'$, et $M \in \mathcal{E}$. La tangente en $M$ coupe la tangente en $A$ (resp. $A'$) en $P$ (resp. $P'$). Montrer que le cercle de diamètre $[PP']$ passe par les foyers de $\mathcal{E}$.

**Exercice n°5**

Montrer que le produit des distances des foyers d'une ellipse à une tangente quelconque est constant.

**Exercice n°6**

Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole équilatère. Soit $ABC$ un triangle quelconque dont les sommets sont sur $\mathcal{H}$. Montrer que l'orthocentre de $ABC$ appartient à $\mathcal{H}$.

**Exercice n°7**

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et la courbe $(\mathcal{C})$ d'équation

$$x^2 + xy + y^2 + x - y = 0$$

**1)** Montrer que cette courbe possède un centre de symétrie $\Omega$ et donner son équation dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$. Vérifier que dans ce repère la première bissectrice $\Delta$ est axe de symétrie.

**2)** On considère un repère orthonormé $(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$ où $\vec{I}$ est un vecteur unitaire de $\Delta$. Donner une équation de $(\mathcal{C})$ dans ce repère.

**3)** Montrer que dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ la seconde bissectrice $\Delta'$ est axe de symétrie. Donner les équations de $\Delta$ et $\Delta'$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Sachant que $(\mathcal{C})$ est une ellipse, tracer $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

**4)** Reprendre l'ensemble des questions précédentes en utilisant la théorie des formes quadratiques et son application aux coniques. Retrouver notamment les axes de $(\mathcal{C})$.

**Exercice n°8**

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et la courbe $(\mathcal{C})$ d'équation

$$x^2 - 3xy + 2y^2 + 2x - 3y + 1 = 0$$

Montrer que cette courbe posséde un centre de symétrie $\Omega$ et donner son équation dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$. En déduire que $(\mathcal{C})$ est la réunion de deux droites que l'on précisera.

**Exercice n°9**

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et la courbe $(\mathcal{C})$ d'équation

$$2x^2 + 3xy - 2y^2 - 10 = 0$$

**1)** Trouver une base orthonormale dans laquelle $(\mathcal{C})$ ait une équation de la forme $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

**2)** Donner les équations des asymptotes de $(\mathcal{C})$ et tracer $(\mathcal{C})$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

**Exercice n°10**

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et la courbe $(\mathcal{C})$ d'équation

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 3x - y - 1 = 0$$

Montrer que $(\mathcal{C})$ est une parabole et trouver un repère orthonormé dans lequel $(\mathcal{C})$ ait une équation de la forme $y^2 = 2px$.