Licence 3 de Mathématiques

GEEU : Feuille d'exercices n°4

Exercices du cours

1) Montrer que l'ensemble des rotations du plan fixant le point A est un groupe pour la composition des applications.

2) Que peut-on dire de la composée de deux rotations du plan ? Cette composée est-elle commutative ?

3) Redonner la liste de toutes les isométries du plan affine à partir de la proposition 4.5 et du catalogue des isométries du plan vectoriel.

4) Montrer que dans l'espace, l'ensemble des rotations d'axe $\mathcal{D}$ donné, en y incluant l'identité, est un groupe pour la composition des applications.

5) Soit $\mathcal{A}$ un espace affine euclidien orienté de dimension trois rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Soit $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ l'application affine qui à tout point M de coordonnées (x, y, z) associe le point $M'(-y, z+1, -x+1)$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

Isométries du plan

Exercice n°1

Reconnaitre les applications affines du plan dans lui-même d'expressions analytiques dans le repère canonique :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y + 1 \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}y + 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}y + 1 \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}y + 2 \end{cases}$$

Exercice n°2

En décomposant les rotations en produits de réflexions, déterminer le centre d'une composée de deux rotations du plan dont la somme des angles n'est pas nulle modulo 2π.

Exercice n°3

On munit le plan affine euclidien d'un repère orthonormé (O, i, j) et on l'identifie au plan complexe. Écrire à l'aide des affixes complexes, la symétrie glissée d'axe d'équation $x + y = 2$ et de vecteur $(3, 3)$.

Exercice n°4

Soit X un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé. Soient A, B, C et D les points de X dont les coordonnées sont $A(0, 3)$, $B(2, 1)$, $C(2, 3)$ et $D(0, 1)$.

1) Montrer que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales et expliciter les coordonnées de leur point d'intersection.

2) Prouver l'existence d'une rotation qui envoie A sur C, C sur B, B sur D et D sur A. Expliciter une représentation matricielle de cette rotation.

Exercice n°5

Soient ABC un triangle équilatéral de centre I et D un point du segment $[BC]$. On construit, extérieurement au triangle ABC, les deux triangles équilatéraux BDE et DCF de centres respectifs J et K. À l'aide d'une composée de deux rotations bien choisies, montrer que le triangle IJK est équilatéral.

Exercice n°6

À l'extérieur d'un triangle quelconque ABC, on construit trois triangles équilatéraux ABC', BCA' et ACB' de centres respectifs I, J et K. Montrer que le triangle IJK est équilatéral.

Exercice n°7

Soit ABC un triangle. On note O le centre du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit à ABC et H son orthocentre. On rappelle que $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ (*relation d'Euler*). Soit Δ la parallèle à (BC) passant par O. En décomposant habilement la translation $t_{\overrightarrow{AH}}$ en produit de deux réflexions, montrer que le symétrique de H par rapport à (BC) appartient au cercle $\mathcal{C}$.

Isométries de l'espace

Exercice n°8

Soit X un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormé. On note f la transformation de X qui envoie le point de coordonnées (x, y, z) sur le point de coordonnées (x', y', z') où :

$$x' = \frac{2x - 2y + z + 1}{3} \qquad y' = \frac{2x + y - 2z + 2}{3} \qquad z' = \frac{x + 2y + 2z + 5}{3}$$

Montrer que f est une isométrie de X. Préciser de quel type d'isométrie il s'agit. Donner ses éléments caractéristiques.

Exercice n°9

Soit X un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormé (O, i, j, k). On désigne par D la droite d'équations $(x = 0, z = 1)$ et par D' la droite d'équations $(y = 0, z = 0)$. On note S_D la symétrie par rapport à la droite D et R_θ la rotation d'axe D' et d'angle θ (en considérant la base (j, k) comme directe). On pose $\varphi = S_D \circ R_\theta$.

1) Écrire dans la base (i, j, k) la matrice de $\overrightarrow{S_D}$, celle de $\overrightarrow{R_\theta}$ et celle de $\overrightarrow{\varphi}$. Écrire les expressions analytiques de S_D et de R_θ dans le repère (O, i, j, k).

2) Montrer que φ est une symétrie, éventuellement glissée, d'axe une droite Δ.

3) Pour tout point M de E, prouver que les milieux de $[MS_\Delta(M)]$ et de $[M\varphi(M)]$ sont sur Δ.

4) En utilisant le point O, montrer que Δ passe par le point de coordonnées $(0, 0, 1)$ et est contenue dans le plan affine d'équation $x = 0$.

5) Donner les composantes du vecteur de glissement de φ en fonction de θ.

Exercice n°10

L'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ de dimension 3 est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Dans chacun des cas suivants, reconnaître l'application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ qui à $M(x, y, z)$ associe $f(M)(x', y', z')$ et préciser ses éléments caractéristiques.

$$(a) \quad \begin{cases} x' = -z + 1 \\ y' = -x \\ z' = y - 2 \end{cases} \qquad (b) \quad \begin{cases} x' = \frac{1}{9}(x - 8y - 4z + 1) \\ y' = \frac{1}{9}(-8x + y - 4z + 2) \\ z' = \frac{1}{9}(-4x - 4y + 7z + 3) \end{cases} \qquad (c) \quad \begin{cases} x' = -z + 1 \\ y' = x \\ z' = y - 2 \end{cases}$$

Exercice n°11

On appelle *retournement* (ou *demi-tour*) d'axe $\mathcal{D}$ la rotation d'axe la droite $\mathcal{D}$ et d'angle plat.

1) Montrer qu"un retournement est une symétrie orthogonale.

2) Quel est le produit de deux retournements ? (On pourra distinguer suivant que les axes sont parallèles ou pas.)

3) Montrer que les retournements engendrent tous les déplacements de l'espace.

Isométries conservant une partie

Exercice n°12

Soit $\mathcal{C} = \mathcal{C}(O, r)$ un cercle du plan et f une application affine telle que $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$. Montrer que f est une isométrie de point fixe O.

Exercice n°13

Déterminer le groupe d'isométries d'un segment dans le plan euclidien.

Exercice n°14

Soit ABC un triangle isocèle en A non equilatéral, le but de cet exercice est d'étudier l'ensemble des isométries de $\mathcal{P}$ qui préservent globalement ABC.

1) Montrer que cet ensemble est groupe.

2) Montrer que si f préserve ABC alors f fixe le barycentre G de ABC.

3) En étudiant les distances GA, GB, GC montrer que $f(A) = A$

4) En déduire (en utilisant la classification des isométries de $\mathbb{R}^2$) le groupe de symétries de ABC.

Exercice n°15

Déterminer le groupe des isométries du plan affine euclidien laissant globalement invariant :

1) un carré ;

2) la réunion de deux droites parallèles et distinctes.

Exercice n°16

Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels que $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$. Combien y a-t-il d'isométries transformant ABC en $A'B'C'$?

Indication : si f et g sont deux telles isométries, alors $f \circ g^{-1}$ est une isométrie conservant ABC.

Exercice n°17

Notons $D \subset \mathbb{R}^2$ une droite affine de $\mathbb{R}^2$.

1) Montrer que l'ensemble I_D des $g \in Iso(\mathbb{R}^2)$ telles que $g(D) = D$ est un sous-groupe de $Iso(\mathbb{R}^2)$.

2) Déterminer les translations qui appartiennent à I_D.

3) Montrer que si $g \in I_D$ possède un point fixe alors g a un point fixe sur D.

4) Soit $g \in I_D$, montrer qu'il existe une translation t de I_D telle que $g \circ t$ possède un point fixe.

5) Décrire I_D.