Université de Rennes 1 **2009-2010**

Licence 3 de Mathématiques

GEEU : Feuille d'exercices n°3

Géométrie vectorielle euclidienne (fin)

Exercices du cours

1) Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (euclidien orienté) de la rotation $r_{\vec{\mathcal{D}},\frac{\pi}{6}}$ où $\vec{\mathcal{D}}$ est la droite dirigée et orientée par $\vec{n}(1,-1,2)$.

2) Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Soit la rotation $r = r_{\vec{\mathcal{D}},\theta}$ où $\vec{\mathcal{D}}$ est la droite dirigée et orientée par le vecteur unitaire $\vec{n}$. Montrer que pour tout $\vec{x}$ de $\mathcal{D}^\perp$ on a $r(\vec{x}) = (\cos\theta)\vec{x} + (\sin\theta)\,\vec{n}\wedge\vec{x}$.

Montrer de même que pour tout $\vec{x}$ de E on a $r(\vec{x}) = \vec{x} + (\sin\theta)\,\vec{n}\wedge\vec{x} + (1-\cos\theta)\,\vec{n}\wedge(\vec{n}\wedge\vec{x})$.

Exercice n°1

Soient $\mathcal{P}$ un plan de $\mathbb{R}^3$ et $\vec{v}$ un vecteur non nul orthogonal à ce plan. Montrer que la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur $\mathcal{P}$ est $I - \dfrac{1}{\|\vec{v}\|^2}V.{}^tV$ où V désigne la matrice colonne des coordonnées de $\vec{v}$. Quelle est la matrice de la réflexion par rapport au plan $\mathcal{P}$?

Exercice n°2

Donner la nature et préciser les éléments caractéristiques de la transformation de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ -1 & -3 & \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$.

Angles

Exercices du cours

Dans tout ce qui suit, on se place dans un espace vectoriel euclidien de dimension 2.

1) Montrer, à partir des expressions matricielles, que l'ensemble des rotations du plan vectoriel euclidien est un groupe commutatif.

2) Montrer que la loi + définie sur l'ensemble des angles orientés de vecteurs confère à cet ensemble une structure de groupe abélien.

3) Montrer que toute réflexion inverse les angles. Autrement dit, pour tous vecteurs non nuls u et v, et pour toute réflexion s, $(\widehat{s(u),s(v)}) = -(\widehat{u,v})$.

4) Déterminer la somme des mesures des angles géométriques d'un triangle non aplati.

$\boxed{\textbf{Exercice n°1}}$

Le but de cet exercice est de montrer, géométriquement, que pour tout angle φ l'équation $2\,x = \varphi$, dans le groupe $\mathcal{A}$ des angles orientés de vecteurs du plan a deux solutions, et que si α est une solution, l'ensemble des solutions est $\{\alpha\ , \alpha + \omega\}$ (ω désigne l'angle plat). Soit E un plan vectoriel euclidien.

1) Soit $r \in \mathcal{O}^+(E)$. Montrer que $r^2 = Id$ équivaut à $r = Id$ ou $r = -Id$. On pourra remarquer que pour tout vecteur e, le vecteur $e + r(e)$ est invariant par r.

En déduire que pour tout angle x, l'équation $2x = 0$ a comme ensemble de solutions $\{0, \omega\}$.

2) Soient φ et x_0 deux angles tels que $2x_0 = \varphi$. Montrer que si x est un angle, pour que x soit solution de $2x = \varphi$ il faut et il suffit que $x - x_0$ appartienne à $\{0, \omega\}$.

3) Soient u, v deux vecteurs unitaires distincts tels que $\varphi = (\widehat{u, v})$. Soient w un vecteur directeur de la médiatrice de $\{u, v\}$ et $x_0 = (\widehat{u, w})$. Montrer que $\varphi = 2x_0$. Conclure.

4) On appelle *angles droits* les angles x solutions de l'équation $2x = \omega$. Montrer que $(\widehat{u, v})$ est droit si et seulement si $u \perp v$.

5) Résoudre dans $\mathcal{A}$ l'équation $4x = \varphi$.

6) Retrouver ces résultats en utilisant l'isomorphisme de groupes entre $\mathcal{A}$ et $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°2}}$ *(CAPES 1991)*

Soient $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ deux vecteurs unitaires et non colinéaires d'un plan vectoriel euclidien E. Soient $\mathcal{D}$ et Δ les droites vectorielles orthogonales respectivement à $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$. On note s la réflexion d'axe $\mathcal{D}$ et t la réflexion d'axe Δ. On suppose que l'on a $< \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} > = -\cos\left(\dfrac{\pi}{m}\right)$ où $m \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$.

1) Montrer que l'on peut orienter E en sorte que l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}})$ ait pour mesure $\pi - \dfrac{\pi}{m}$. On supposera dorénavant E ainsi orienté.

2) On pose $r = s \circ t$. Donner une mesure de l'angle de r. Montrer que r est d'ordre fini et déterminer son ordre.

3) Soit ρ une rotation de E. Montrer que $\rho \circ s$ est une réflexion qui peut encore s'écrire $s \circ \rho^{-1}$.

4) Soit G l'ensemble des isométries vectorielles de la forme r^k ou $s \circ r^k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

a) En utilisant la question précédente, montrer que G est un groupe.

b) Montrer que ce groupe est fini et préciser son cardinal.