Université de Rennes 1 **2009-2010**

Licence 3 de Mathématiques

GEEU : Feuille d'exercices n°2

Géométrie vectorielle euclidienne

Exercices du cours

Dans tout ce qui suit, E désigne un espace euclidien.

1) Montrer que $\forall x, y \in E$, $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Étudier les cas d'égalité.

2) Montrer que $\forall x, y \in E$, $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ (identité du parallélogramme).

3) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
Montrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

4) Si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$ sont deux bases de E, si A est la matrice du produit scalaire dans la base $\mathcal{B}$ et si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, montrer que la matrice du produit scalaire dans la base $\mathcal{B}'$ est ${}^tPAP$.

5) On rappelle qu'une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan. Montrer que, deux vecteurs unitaires distincts u et v de $\mathbb{R}^2$ étant donnés, il existe une unique réflexion échangeant u et v. Est-ce encore valable dans $\mathbb{R}^3$?

6) Montrer que tout automorphisme orthogonal f conserve l'orthogonalité c'est à dire que $\forall x, y \in E$, $(x \perp y \Rightarrow f(x) \perp f(y))$. Suffit-il de conserver l'orthogonalité pour être un automorphisme orthogonal ?

7) Montrer que si f est un automorphisme orthogonal alors pour tout sous-espace vectoriel F de E on a $f(F^\perp) = f(F)^\perp$. En déduire que si F est un sous-espace stable par f alors $F^\perp$ est également stable par f.

8) Montrer qu'un endomorphisme f de E est un automorphisme orthogonal si et seulement si il transforme une (resp. toute) base orthonormée de E en une base orthonormée.

9) Soit A une matrice orthogonale. Interpréter la relation ${}^tA.A = I$ sur les vecteurs colonnes (ou lignes) de la matrice A.

10) Montrer que les seules valeurs propres (réelles) possibles d'un automorphisme orthogonal sont 1 et -1 et que les éventuels sous-espaces propres correspondants sont nécessairement orthogonaux.

Exercice n°1

Soient n nombres réels x_i. Montrer que $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

Exercice n°2

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1) Peut-on trouver une constante strictement positive C telle que pour tout couple $\left((a_i)_{i\in\mathbb{N}_n},(b_i)_{i\in\mathbb{N}_n}\right)$ de n-uplets de nombres réels $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq C \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2$?

2) Peut-on trouver une constante strictement positive C telle que pour tout couple $\left((a_i)_{i\in\mathbb{N}_n},(b_i)_{i\in\mathbb{N}_n}\right)$ de n-uplets de nombres réels $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq C \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2$?

3) Peut-on trouver une constante strictement positive C telle que pour tout couple $\left((a_i)_{i\in\mathbb{N}_n},(b_i)_{i\in\mathbb{N}_n}\right)$ de n-uplets de nombres réels $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \geq C \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2$?

Exercice n°3

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique (e_1, e_2). Peut-on construire un produit scalaire f sur $\mathbb{R}^2$ de sorte que les vecteurs $e_1 + 2e_2$ et $e_1 + 3e_2$ forment une base orthonormée ?

Exercice n°4

Dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire standard et de la base canonique $\mathcal{C}$, appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ où $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (2, 1, 0)$, $v_3 = (-1, -1, -1)$ pour obtenir une base orthonormée $\mathcal{B}'$. La matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$ est-elle orthogonale ? L'écrire. La matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}'$ est-elle orthogonale ?

Exercice n°5

Dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire standard et de la base canonique (e_1, e_2, e_3), déterminer une base orthonornée du sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs $e_1 + e_2$ et $e_1 + e_3$ et la compléter en une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

Exercice n°6

On considère $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire usuel. Soit F le sous espace engendré par $v_1 = (1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, -1, 1)$ et $v_3 = (2, 3, -1, 1)$. Déterminer une base orthonormée de F et la compléter pour obtenir une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$.

Exercice n°7

Soit E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique et de la base canonique. Soit H le plan d'équation $x+2y+2z = 0$. Soient π la projection orthogonale sur H et s la symétrie orthogonale par rapport à H.

1) Déterminer un vecteur n normal à H et unitaire.

2) Pour tout vecteur v de E, écrire $v - \pi(v)$, puis $\pi(v)$ à l'aide de v et n seulement. (On pourra utiliser des produits scalaires comme coefficients.)

3) Déterminer les matrices de π et de s dans la base canonique. Sont-elles orthogonales ? symétriques ?

Exercice n°8

Montrer que deux symétries orthogonales distinctes d'un plan vectoriel euclidien commutent si et seulement si leurs axes sont orthogonaux.

Exercice n°9

Soit E un espace vectoriel euclidien. Répondre par vrai ou faux, puis dire sous quelles hypothéses supplémentaires sur la base l'affirmation est vraie.

1) La matrice A d'une application linéaire orthogonale u dans une base $\mathcal{B}$ de E vérifie ${}^tAA = Id$.

2) Dans toute base orthonormée de $\mathbb{R}^3$, la matrice d'une rotation est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Exercice n°10

Soit φ une forme linéaire sur E (c'est à dire une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$) et a un vecteur non nul. Montrer que l'application $f : E \to E$ définie par $f(x) = x + \varphi(x)a$ est une isométrie vectorielle si et seulement si φ est nulle ou $\varphi(x) = -2\dfrac{<x,\, a>}{<a,\, a>}$. Quelle est l'isométrie correspondant à chacun de ces cas ?

Exercice n°11

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 3 & 2 & 6 \\ 6 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

1) Montrer que f est une rotation (en dimension 3 une rotation est une isométrie de déterminant 1).

2) Trouver un vecteur unitaire v dans l'axe de la rotation.

3) Compléter en une base orthomormée de $\mathbb{R}^3$.

4) Écrire la matrice de f dans cette base.

Exercice n°12

1) Montrer que dans un espace euclidien, une projection orthogonale est auto-adjointe. Que peut-on en déduire pour sa matrice dans une base orthonormée ?

2) Montrer que dans un espace euclidien, une projection auto-adjointe est une projection orthogonale.

3) Soit $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que f est une projection orthogonale dont on précisera l'image.

$\boxed{\textbf{Exercice n°13}}$

Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit u une transformation orthogonale de E telle que $u^2 = id$. On dit que u est une involution.

1) Montrer que u est diagonalisable.

2) Montrer que les sous-espaces propres de u sont orthogonaux.

3) Soient $a \in E - \{0\}$ et $u_a : E \to E, x \mapsto x - 2\frac{<x,a>}{<a,a>}a$. Montrer que u_a est une involution orthogonale. Déterminer ses espaces propres et décrire u géométriquement.

4) Soient u une involution orthogonale et w une transormation orthogonale. Montrer que $w \circ u \circ w^{-1}$ est une involution orthogonale et que $\mathrm{Ker}(w \circ u \circ w^{-1} - id) = w(\mathrm{Ker}\ (u - id))$.

5) Soient $a, b \in E - \{0\}$. Montrer que u_a et u_b sont conjuguées par une transformation orthogonale.

$\boxed{\textbf{Exercice n°14}}$

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Soient $u, v, w \in E$.

1) Montrer que $(u \wedge v) \wedge w = <u,\, w>\ v -\ <v,\, w>\ u$.

2) Montrer que $\|u \wedge v\|^2 + <u,\, v>^{\ 2} = \|u\|^2 . \|v\|^2$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°15}}$

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B}$. Soient u et u' deux vecteurs de E donnés par leurs composantes (a, b, c) et (a', b', c') dans cette base. On considère l'application linéaire $\varphi : E \to \mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$.

1) Montrer que $u \wedge u' \in \mathrm{Ker}\ \varphi$.

2) Montrer que $v \in \mathrm{Ker}\ \varphi \iff v \perp u$ et $v \perp u'$.