Université de Rennes 1 **2009-2010**

Licence 3 de Mathématiques

GEEU : Feuille d'exercices n°1

Espaces et applications affines

Exercices du cours

Dans tout ce qui suit, X désigne un espace affine réel.

1) Montrer que par deux points distincts de X il passe une unique droite affine.

2) Soient F et G deux s.e.a. de X tels que $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$ soient supplémentaires dans $\overrightarrow{X}$. Montrer que $F \cap G$ est un singleton.

3) Trois points de X sont dits alignés s'ils appartiennent à une même droite. Montrer que le sous-espace affine engendré par trois points non alignés est un plan affine (s.e.a. de direction un plan vectoriel).

4) Montrer que le parallélisme (respectivement le parallélisme faible) est une relation d'équivalence (respectivement un pré-ordre) sur l'ensemble des sous-espaces affines de X.

5) Montrer que deux sous-espaces affines sont parallèles si et seulement s'il existe une translation qui envoie l'un sur l'autre.

6) Montrer que par tout point de X il passe une unique droite affine parallèle à une droite donnée.

7) Montrer que les trois médianes d'un triangle sont concourantes en le centre de gravité du triangle.

8) Étant donnés quatre points non coplanaires A, B, C, D d'un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 3, on appelle *tétraèdre* de sommets A, B, C, D l'enveloppe convexe T de ces quatre points. Montrer que T n'est autre que l'ensemble des barycentres de ces quatre points affectés de masses positives ou nulles.

9) Montrer que trois points non alignés de X sont affinement indépendants.

10) Démontrer les deux propriétés :

- Une application affine $f : X \to X$ est une translation si et seulement si $\vec{f}$ est l'identité de $\overrightarrow{X}$.
- Une application affine $f : X \to X$ est une homothétie ou une translation si et seulement si $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*$, $\vec{f} = \lambda id_{\overrightarrow{X}}$.

Exercice n°1

On considère l'ensemble $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivables, à dérivée seconde continue. Montrer que le sous-ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation différentielle $y" - y = 1$ est un espace affine dont on précisera l'espace vectoriel directeur, la dimension et un repère affine.

Exercice n°2

Montrer que $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1+2a-b & 0 \\ 2-a-b & a-b \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice n°3

Montrer que $\mathcal{F} = \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) = f(x) + 1 \right\}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. En déterminer un point et la direction.

Exercice n°4

Soit l'espace affine $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère affine A_0, A_1, A_2, A_3.

Montrer que le sous-ensemble F de l'espace affine $\mathbb{R}^3$ d'équations $\begin{cases} 2x - y - z - 3 = 0 \\ x + y - 2z = 3 \end{cases}$ est un sous-espace affine. Préciser sa dimension, l'espace vectoriel directeur et un repère affine.

Exercice n°5

Soient F et G deux sous-espaces affines de X. Montrer que $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$ sont supplémentaires dans $\overrightarrow{X}$ si et seulement si $F \cap G$ est un singleton et $\mathrm{Aff}\,(F \cup G) = X$.

Exercice n°6

Dans un repère affine de l'espace affine $\mathbb{R}^3$, à quelle condition sur les coefficients les plans d'équations $ax + by + cz = d$ et $a'x + b'y + c'z = d'$ sont-ils parallèles ?

Exercice n°7

Dans un espace affine réel de dimension 3, on donne trois droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ deux à deux non coplanaires et parallèles à un même plan. Montrer que les droites qui rencontrent $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ restent parallèles à un plan fixe.

Exercice n°8

Soit l'espace affine $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère affine A_0, A_1, A_2, A_3.

1) Trouver un système d'équations pour le sous-espace affine $\mathcal{A}$ passant par le point $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et parallèle au plan d'équation $2x - y - z = 5$.

2) Trouver un système d'équations pour le sous-espace affine $\mathcal{B}$ passant par le point $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et parallèle à la droite d'équations $2x - y - z = 5$ et $x + y + z = 3$.

3) Trouver un système d'équations du s.e.a. $\mathcal{C}$ engendré par $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice n°9

Dans le plan affine $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère affine A_0, A_1, A_2, représenter l'enveloppe convexe des points donnés en coordonnées cartésiennes $A\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ et $E\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$.

Exercice n°10

Soient F et G deux ensembles convexes d'un espace affine X. Démontrer que l'ensemble Z des milieux des segments qui joignent un point de A à un point de B est convexe.

Exercice n°11

Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3, et $ABCD$ un tétraèdre de $\mathcal{E}$. Montrer que les droites joignant les milieux des côtés opposés du tétraèdre sont concourantes.

Exercice n°12

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine réel de dimension 3, muni d'un repère cartésien $(O;\vec{u},\vec{v},\vec{w})$. Soient les points $A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$, les droites $d_1\left\{\begin{array}{rcl}x&=&3-\lambda\\y&=&1+2\lambda\\z&=&-1+\lambda\end{array}\right.$ $(\lambda\in\mathbb{R})$, $d_2\left\{\begin{array}{rcl}x&=&1+3\mu\\y&=&-2\mu\\z&=&3+5\mu\end{array}\right.$ $(\mu\in\mathbb{R})$, et les plans

$$(P_1)\left\{\begin{array}{rcl}x&=&1-2\lambda+3\mu\\y&=&-2+\lambda+\mu\\z&=&4-\lambda-2\mu\end{array}\right.\quad\left((\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right),\quad (P_2)\ 2x-y+3z-1=0,\quad (P_3)\ x+2z-4=0.$$

1) Donner une équation cartésienne de P_1 et une représentation paramétrique de $P_2\cap P_3$.

2) Déterminer l'intersection de P_2 avec la droite (AB).

3) Donner une représentation paramétrique de la droite passant par A, parallèle à P_2 et coupant d_1.

Exercice n°13

Soit $\mathcal{E}$ un plan affine muni d'un repère cartésien. Pour un point P, on note x_P, y_P ses coordonnées. Montrer que trois points P,Q,R sont alignés si et seulement si $\det\begin{pmatrix}x_P&y_P&1\\x_Q&y_Q&1\\x_R&y_R&1\end{pmatrix}=0$.

Exercice n°14

On se place dans un plan affine $\mathcal{P}$ muni d'un repère affine (A,B,C). Soient P, Q et R des points de $\mathcal{P}$ de coordonnées barycentriques respectives $(\alpha_P,\beta_P,\gamma_P)$, $(\alpha_Q,\beta_Q,\gamma_Q)$ et $(\alpha_R,\beta_R,\gamma_R)$.

1) Démontrer que P, Q et R sont alignés si et seulement si $\begin{vmatrix} \alpha_P & \beta_P & \gamma_P \\ \alpha_Q & \beta_Q & \gamma_Q \\ \alpha_R & \beta_R & \gamma_R \end{vmatrix} = 0.$

En déduire l'équation en coordonnées barycentriques d'une droite (QR) (avec $Q \neq R$).

2) On définit *l'aire algébrique* du triangle PQR (éventuellement dégénéré) par l'égalité

$$\text{Aire}\,(PQR) = \begin{vmatrix} \alpha_P & \beta_P & \gamma_P \\ \alpha_Q & \beta_Q & \gamma_Q \\ \alpha_R & \beta_R & \gamma_R \end{vmatrix}.$$

3) Montrer que, pour deux triangles PQR et $P'Q'R'$, le rapport $\frac{\text{Aire}\,(PQR)}{\text{Aire}\,(P'Q'R')}$ ne dépend pas du choix du repère (A, B, C).

4) Montrer que les coordonnées d'un point S dans un repère (P, Q, R) sont données par les rapports

$$\frac{\text{Aire}\,(SQR)}{\text{Aire}\,(PQR)}, \quad \frac{\text{Aire}\,(PSR)}{\text{Aire}\,(PQR)}, \quad \frac{\text{Aire}\,(PQS)}{\text{Aire}\,(PQR)}.$$

Exercice n°15

Soient a et b deux réels non nuls distincts. Dans un plan affine muni d'un repère, trouver une équation cartésienne de la droite Δ passant par le point de coordonnées (a, b) et par le point d'intersection des deux droites D d'équation $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ et D' d'équation $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$.

Exercice n°16

Dans un espace affine de dimension 3 muni d'un repère affine, montrer que les droites D et D' d'équations cartésiennes $D : (x + y - z - 2 = 0$ et $2x - y + 3z - 1 = 0)$ et $D' : (x - 2y - 3 = 0$ et $3x + 6y - 1 = 0)$ sont concourantes. Trouver une équation cartésienne du plan qu'elles déterminent.

Exercice n°17

Dans l'espace affine $\mathbb{R}^2$, on considère le triangle ABC. Choisir un repère affine A_0, A_1, A_2 adapté pour montrer simplement que les médianes du triangle ABC sont concourantes. On devra calculer une équation pour chaque médiane et montrer qu'elles sont concourantes.

Exercice n°18

1) Soit (AB) une droite dans un espace affine déterminée par deux points distincts A et B. Décrire à l'aide des coordonnées barycentriques dans le repère A, B les trois régions de la droite découpées par les points A et B.

2) Soit ABC un triangle non plat dans un plan affine $\mathcal{P}$. Décrire à l'aide des coordonnées barycentriques dans le repère A, B, C les sept régions découpées par les droites qui portent les côtés du triangle ABC.

Exercice n°19

1) On considère une translation t et une homothétie h d'un espace affine. Identifier les applications $f_1 = t \circ h \circ t$, $f_2 = h^{-1} \circ t \circ h$ et $f_3 = t \circ h \circ t^{-1}$.

2) Montrer que l'ensemble composé des translations et des symétries centrales d'un espace affine est un groupe pour la composition. Est-il commutatif ?

Exercice n°20

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E. Trouver toutes les applications affines $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ telles que pour tout $u \in E$, $t_u \circ f = f \circ t_u$.

Exercice n°21

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine et G un sous-groupe fini du groupe affine de $\mathcal{E}$. Montrer qu'il existe un point de $\mathcal{E}$ qui est fixe pour tous les éléments de G.

Exercice n°22

Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$ muni du repère cartésien (O, e_1, e_2, e_3), on considère l'application affine f (d'application linéaire associée $\vec{f}$) définie analytiquement par : $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(y + z + 3) \\ y' = \frac{1}{2}(y + z + 5) \\ z' = \frac{1}{2}(y + z + 7) \end{cases}$

1) Montrer que $\vec{f}$ est une projection (on précisera ses caractéristiques). f est-elle une projection?

2) Soit t la translation de vecteur $(3, 3, 3)$. Identifier l'application affine $f \circ t$.

Exercice n°23 *Projections*

Soient X un espace affine et F et G deux sous espaces affines de directions supplémentaires dans $\overrightarrow{X}$.

1) Soit M un point de E. Montrer que le sous-espace affine passant par M et parallèle à G rencontre F en un unique point noté $p(M)$. Montrer que l'application p est affine.

2) Déterminer les points fixes de p et Montrer que $p \circ p = p$.

Exercice n°24 *Symétries*

Soient X un espace affine et F et G deux sous espaces affines de directions supplémentaires dans $\overrightarrow{X}$.

1) Décrire la symétrie s par rapport à F parallèlement à G. Est-elle bijective ?

2) Soit M un point de E. Quel est le milieu du segment $[Ms(M)]$?

3) Déterminer $\mathrm{Ker}(\vec{s} - id_{\overrightarrow{E}})$ et $\mathrm{Ker}(\vec{s} + id_{\overrightarrow{E}})$.

4) Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\overrightarrow{G}$. Déterminer l'application $s \circ t_{\vec{u}} \circ s^{-1}$.

5) Dans l'espace affine $\mathbb{R}^2$ muni du repère cartésien (O, e_1, e_2), donner l'expression analytique de la symétrie de direction $e_1 + e_2$ par rapport à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $2x + y - 2 = 0$.

Exercice n°25 *Affinités et transvections*

Dans l'espace affine $X = \mathbb{R}^3$, on considère un endomorphisme affine f qui admet un hyperplan de points fixes F. Soit A un point de X qui n'est pas dans F.

1) Que dire de f si $f(A) = A$?

2) On suppose maintenant que $f(A)$ est différent de A. On suppose de plus que la droite $(Af(A))$ coupe le plan F en un point Ω. Expliquer comment construire $f(M)$. On dit que f est une *affinité*.

3) On suppose maintenant que $f(A)$ est différent de A. On suppose de plus que la droite $(Af(A))$ ne rencontre pas le plan F. Expliquer comment construire $f(M)$. On dit que f est une *transvection*.

Exercice n°26

Soit le plan affine X muni du repère cartésien $(A, \vec{u}, \vec{v})$. On considère l'application f qui à tout point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associe le point $M'\begin{pmatrix} 2x - 5y + 3 \\ -4x + 10y - 1 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que f est affine et écrire la matrice de son application linéaire associée $\vec{f}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

2) Déterminer les points fixes de f.

3) Montrer que $\mathrm{Im}\ \vec{f}$ et $\mathrm{Ker}\ \vec{f}$ sont supplémentaires dans $\vec{E}$. Donner une base de chacun de ces sous-espaces.

Exercice n°27

Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère affine A_0, A_1, A_2, A_3,

1) Donner l'expression analytique de :

a) l'homothétie h de rapport 4 et de centre Ω défini par $\overrightarrow{A_0\Omega} = \overrightarrow{A_0A_1} + 2\overrightarrow{A_0A_2} + 3\overrightarrow{A_0A_3}$

b) la symétrie s d'axe $(x + y + z = 1)$ parallèlement à $\overrightarrow{A_0A_1}$.

c) l'affinité a de base d'équation $x + y + z = 1$, de rapport 3, parallèlement à $\overrightarrow{A_0A_1}$.

d) la transvection t de base d'équation $(x + y + z = 1)$ et qui envoie le point A_0 sur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

2) Donner des expressions analytiques de ces applications affines dans des repères mieux adaptés.