Correction rapide de l'examen du 14 avril 2010

Exercice du cours

1) Soient ABC un triangle et I, J et K les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$ (c'est à dire les isobarycentres respectifs de A et B, B et C, et C et A). Si G désigne l'isobarycentre de A, B et C, par associativité du barycentre G est le barycentre de $\{(I,2),(C,1)\}$ mais aussi celui de $\{(J,2),(A,1)\}$ et de $\{(K,2),(B,1)\}$. Par suite G appartient aux trois médianes de ABC.

2) On a $F \subset F+G$ et $G \subset F+G$ donc $(F+G)^{\perp} \subset F^{\perp}$ et $(F+G)^{\perp} \subset G^{\perp}$. On en déduit $(F+G)^{\perp} \subset F^{\perp} \cap G^{\perp}$. Soit réciproquement $y \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$. Tout z de $F+G$ s'écrit $z = f+g$ avec $f \in F$ et $g \in G$. Par suite, $<y, z> = <y, f> + <y, g> = 0+0$ et donc $y \in (F+G)^{\perp}$.

Exercice n°1

1) Il y a l'identité, les réflexions, les translations, les rotations et les symétries glissées.

2) Remarquons que (IK) est parallèle à (BC) (droite des milieux) donc est la médiatrice de $[AB]$. On a donc $f(A) = s(A) = B$. Si on complète la figure en un carré $ABCD$, on trouve alors $f(B) = s(D) = C$. Par suite, $f \circ f(A) = C \neq A$. L'isométrie négative f n'est donc pas une réflexion (on aurait sinon $f \circ f = id$) : c'est une symétrie glissée qui s'écrit $f = t_{\vec{u}} \circ s_{\mathcal{D}} = s_{\mathcal{D}} \circ t_{\vec{u}}$ avec $\vec{u}$ vecteur dirigeant $\mathcal{D}$. Mais alors, $f \circ f = t_{2\overrightarrow{u}}$ et donc $\overrightarrow{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AK}$. Enfin, puisque $f(A) = B$, $s_{\mathcal{D}}(K) = B$ et $\mathcal{D}$ est donc la médiatrice de $[KB]$. En conclusion, f est la symétrie glissée d'axe (IJ) et de vecteur $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{IJ}$.

Exercice n°2

1) La recherche d'un éventuel centre de symétrie conduit au système $\begin{cases} 6x+4y-12 & = 0 \\ 4x-8 & = 0 \end{cases}$.

Le point $\Omega(2,0)$ est donc centre de symétrie de $\mathcal{C}$. Dans le repère $(\Omega, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, une équation de $\mathcal{C}$ est $3X^2 + 4XY - 4 = 0$.

2) On a $P_A(X) = X^2 - 3X - 4$ et les valeurs propres de cette matrice sont donc -1 et 4. Le sous-espace propre associé à la valeur propre 4 (resp. -1) a pour équation $x - 2y = 0$ (resp. $2x + y = 0$) et une base orthonormée de vecteurs propres est donc $(\vec{\imath}\,', \vec{\jmath}\,')$ où $\vec{\imath}\,' = \frac{\sqrt{5}}{5}(2\vec{\imath} + \vec{\jmath})$ et $\vec{\jmath}\,' = \frac{\sqrt{5}}{5}(\vec{\imath} - 2\vec{\jmath})$.

3) Une équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $(\Omega, \vec{\imath}\,', \vec{\jmath}\,')$ est alors $4x'^2 - y'^2 - 4 = 0$ soit $x'^2 - \frac{y'^2}{2^2} = 1$.

Il s'agit de l'hyperbole de foyer $F(\sqrt{5}, 0)$, de directrice associée $\mathcal{D} : x = \frac{\sqrt{5}}{5}$ et d'excentricité $e = \sqrt{5}$ (coordonnées exprimées dans le repère $(\Omega, \vec{\imath}\,', \vec{\jmath}\,')$).

Sa représentation graphique est visible en dernière page de ce document.

Exercice n°3

1) Il est clair que f est affine d'application linéaire associée $\vec{f}$ dont la matrice dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ est $M=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&-1&2\\2&-2&1\\-1&-2&-2\end{pmatrix}$. Il est immédiat que $M.{}^tM=I$ et donc M est une matrice orthogonale, $\vec{f}$ est une isométrie vectorielle et f une isométrie affine.

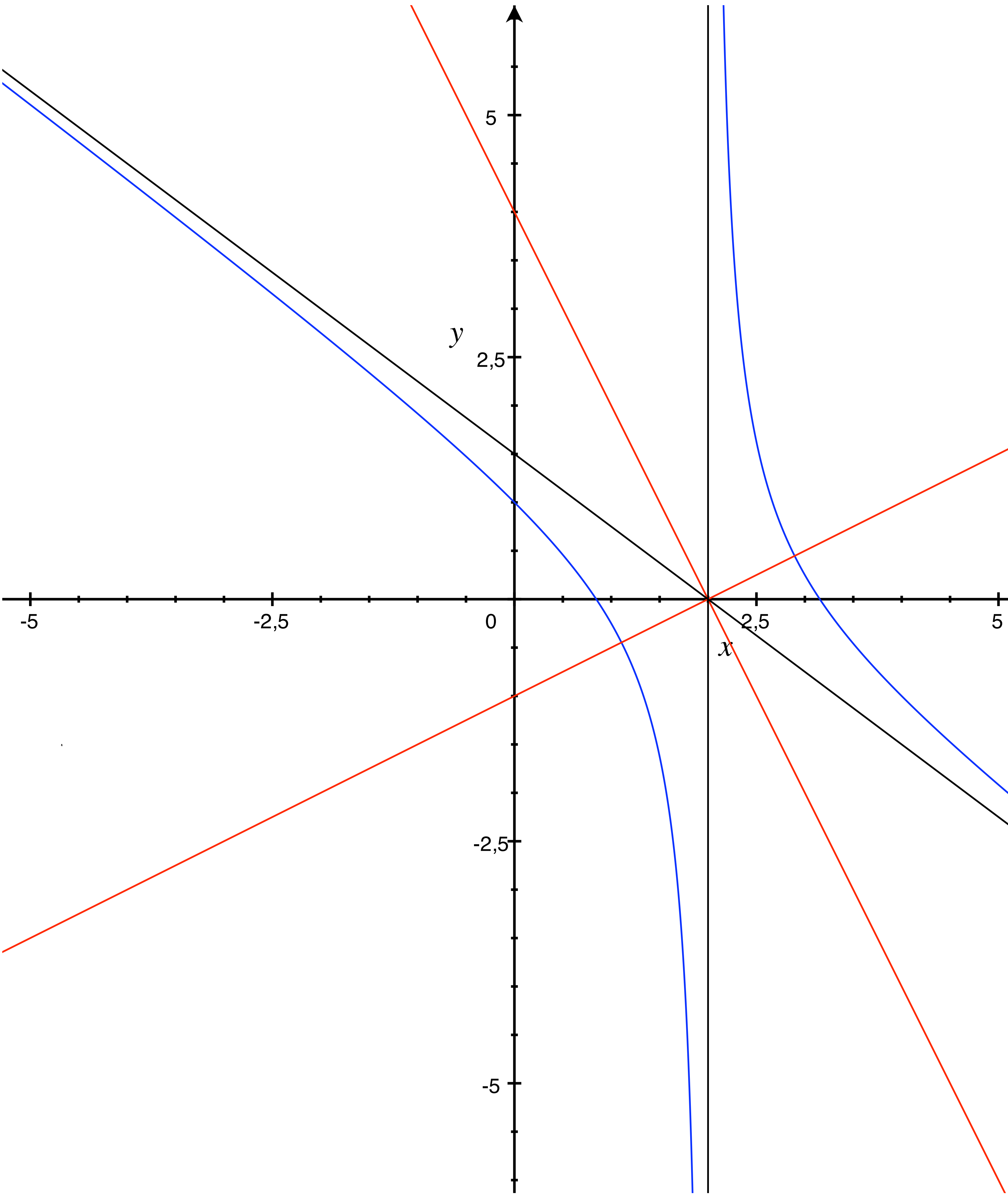
2) Soit $M(x,y,z)$. M est fixe par f si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{rl}-5x-y+2z-2&=0\\2x-5y+z-1&=0\\-x-2y-5z+5&=0\end{array}\right.\ \text{soit}\ \left\{\begin{array}{rl}-x-2y-5z+5&=0\\9y+9z-9&=0\\9y+27z-27&=0\end{array}\right.\ \text{ou encore}\ \left\{\begin{array}{rl}-x-2y-5z+5&=0\\y+z-1&=0\\z&=1\end{array}\right.$$

f a donc un unique point fixe : $A(0,0,1)$. La classification des isométries affines en dimension 3 entraîne alors que f est une anti-rotation : $f=s_{\mathcal{P}}\circ r_{\vec{\mathcal{D}},\alpha}$ (composée commutative).

3) La matrice de $\vec{f}\circ\vec{f}$ dans $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ est $M^2=\begin{pmatrix}0&0&-1\\-1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$. C'est la matrice d'une isométrie (distincte de l'identité) de déterminant $+1$ donc d'une rotation vectorielle. L'axe de cette rotation est l'ensemble des vecteurs fixes c'est à dire la droite dirigée par $\vec{n}(1,-1,-1)$. L'angle θ de cette rotation est tel que $1+2\cos\theta=0$. De plus, $\vec{u}(1,1,0)\in\vec{\mathcal{D}}^\perp$ donc, le plan $\vec{\mathcal{D}}^\perp$ étant orienté par le choix de $\vec{n}$, $\sin\theta$ est du signe de $\det(\vec{u},\vec{f}\circ\vec{f}(\vec{u}),\vec{n})=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&-1&-1\\0&1&-1\end{vmatrix}=3$. Par suite, une mesure de θ est $+\frac{2\pi}{3}$.

4) $f=s_{\mathcal{P}}\circ r_{\vec{\mathcal{D}},\alpha}$ entraînant $f\circ f=r_{\vec{\mathcal{D}},2\alpha}$, f est la composée commutative de la réflexion par rapport au plan $\mathcal{P}$ d'équation $x-y-z+1=0$ (plan normal à $\vec{n}$ passant par A) et de la rotation autour de la droite passant par A, dirigée et orientée par $\vec{n}$, et d'angle α avec $2\alpha=\theta$. Comme $\det(\vec{u},\vec{f}(\vec{u}),\vec{n})=\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&0&-1\\0&-1&-1\end{vmatrix}=-3$, une mesure de α est finalement $\frac{4\pi}{3}$.



y
5
2,5
-2,5
-5
x
-5
-2,5
0
2,5
5