Université de Rennes 1 **2009-2010**

Licence 3 de Mathématiques

GEEU : Examen du 14 avril 2010

Durée : 2 h - Aucun document autorisé

Le barème n'est donné qu'à titre indicatif

Exercices du cours *(4 points)*

1) Montrer que les trois médianes d'un triangle sont concourantes en le centre de gravité du triangle.

2) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel euclidien E.

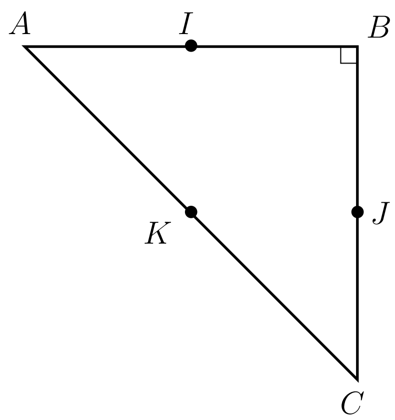
Montrer que $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$

Exercice n°1 *(4 points)*

1) Rappeler les différents types d'isométries du plan.

2) Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle rectangle isocèle en B du plan affine euclidien orienté. I, J et K désignent les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$ et $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. On note s la réflexion d'axe (IK) et r la rotation de centre A et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{2}$. On pose $f = s \circ r$.

Déterminer $f \circ f(A)$. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'isométrie f.



Exercice n°2 *(5 points)*

Dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation

$$3x^2 + 4xy - 12x - 8y + 8 = 0$$

1) Montrer que $\mathcal{C}$ a un centre de symétrie Ω dont on déterminera les coordonnées. Donner une équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $(\Omega, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

2) Déterminer une base orthonormée de vecteurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

3) Donner, dans un repère adapté, l'équation réduite de $\mathcal{C}$. Construire alors cette courbe dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°3}}$ *(7 points)*

X désigne un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
Soit $f : X \to X$ l'application qui au point M de coordonnées (x, y, z) associe le point M' de coordonnées (x', y', z') telles que

$$\begin{cases} x' &= \frac{1}{3}(-2x - y + 2z - 2) \\ y' &= \frac{1}{3}(2x - 2y + z - 1) \\ z' &= \frac{1}{3}(-x - 2y - 2z + 5) \end{cases}$$

1) Montrer que f est une isométrie.

2) Déterminer l'ensemble des points fixes de f. En déduire la nature de l'isométrie f.

3) On note $\vec{f}$ l'application linéaire associée à f. Vérifier que la matrice de $\vec{f} \circ \vec{f}$ dans $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'isométrie vectorielle $\vec{f} \circ \vec{f}$.

4) Donner alors les éléments caractéristiques de l'isométrie f.