Correction rapide de l'examen du 11 juin 2010

Exercices du cours

1) Fixons un point O de X et posons $O' = f(O)$.

- Si $\lambda = 1$, on pose $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OO'}$. Pour tout point M de X, $\overrightarrow{Mf(M)} = \overrightarrow{MO} + \vec{u} + \overrightarrow{f(O)f(M)} = \overrightarrow{u}$ et f est donc la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.
- Si $\lambda \neq 1$, le point Ω défini par $\overrightarrow{O'\Omega} = \frac{\lambda}{\lambda-1}\overrightarrow{O'O}$ est fixe par f (on a en effet $\overrightarrow{O'f(\Omega)} = \lambda\overrightarrow{O\Omega}$ soit $\overrightarrow{O'f(\Omega)} = \overrightarrow{O'\Omega} + \lambda\overrightarrow{OO'} + (\lambda-1)\overrightarrow{O'\Omega}$). Pour tout point M de X, $\overrightarrow{\Omega f(M)} = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{\Omega M}\right) = \lambda\overrightarrow{\Omega M}$: f est l'homothétie de centre Ω et de rapport λ.

2) On peut, sans restriction, supposer que $\|u\| = \|v\| = 1$. Notons $u' = s(u)$ et $v' = s(v)$. Soient r la rotation telle que $r(u) = v$ et r' la rotation telle que $r'(s(u)) = s(v)$. Il s'agit donc de montrer que $r' = r^{-1}$. Considérons $r'' = s \circ r \circ s$. La rotation r pouvant se décomposer en produit de réflexions sous la forme $r = s \circ s_1$, $r'' = s_1 \circ s$ est une rotation. Or $r''(u') = v'$ et donc $r' = r''$ (unicité de la rotation envoyant un vecteur non nul donné sur un vecteur de même norme). On a alors $r' \circ r = (s \circ r \circ s) \circ r$ et comme $s \circ r = s_1$ est une réflexion, on a bien $r' \circ r = id$.

3) Tout point M du plan est le centre de exactement un cercle tangent à $\mathcal{D}$: le cercle $\mathcal{C}_M$ de centre M et de rayon MH où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$. Or, par la définition monofocale, un point M est sur Γ si et seulement si $MF = MH$ c'est à dire si et seulement si $F \in \mathcal{C}_M$.

Exercice n°1

$s_2 \circ s_1$ est la composée de deux réflexions d'axes sécants en A : c'est la rotation de centre A et d'angle $2(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$. Comme le triangle ABC est rectangle en A, $f = s_2 \circ s_1$ est finalement la symétrie de centre A. On a d'autre part $s_2 \circ s_1(P) = s_2(M) = Q$ et donc A est le milieu de $[PQ]$.
Enfin, $s_1((BP)) = (BM) = (CM)$ et $s_2((CM)) = (CQ)$ et donc $f((BP)) = (CQ)$. Le résultat en découle puisque l'image d'une droite par une symétrie centrale est une droite parallèle.

Exercice n°2

Remarquons tout d'abord que la famille (v_1, v_2, v_3) (où $v_3 = (1,0,0)$ est le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^3$) est libre car de déterminant $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. On utilise alors le procédé d'orthogonalisation (on normalisera par la suite) de Gram-Schmidt : on pose $e_1 = v_1$ puis $e_2 = v_2 + \lambda e_1$ avec λ choisi pour que la famille (e_1, e_2) soit orthogonale : $\lambda = -\dfrac{<v_2,\, e_1>}{<e_1,\, e_1>} = -2$ d'où $e_2 = (1, 0, -1)$.
On pose enfin $e_3 = v_3 + \lambda e_1 + \mu e_2$ avec λ et μ choisis pour que la famille (e_1, e_2, e_3) soit orthogonale : $\lambda = -\dfrac{<v_3,\, e_1>}{<e_1,\, e_1>} = -\dfrac{2}{9}$ et $\mu = -\dfrac{<v_3,\, e_2>}{<e_2,\, e_2>} = -\dfrac{1}{2}$. D'où $e_3 = \frac{1}{18}(1, 4, 1)$.
Une base orthonormée de notre sous-espace est donc : $\left(\frac{1}{3}(2, -1, 2), \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 0, -1), \frac{\sqrt{2}}{6}(1, 4, 1)\right)$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°3}}$

Un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$.

En confondant un vecteur avec la matrice colonne de ses coordonnées, la matrice de la réflexion vectorielle par rapport au plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ est $Id - 2\dfrac{\vec{n}.\,{}^t\vec{n}}{{}^t\vec{n}.\vec{n}} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} - \dfrac{2}{9}\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&4\end{pmatrix} = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}7&-4&4\\-4&1&8\\4&8&1\end{pmatrix}$. (On retrouve cette expression en écrivant un vecteur quelconque $\vec{u}$ sous la forme $\vec{u} = \vec{p} + \lambda\vec{n}$ avec $\vec{p} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, en constatant que $<\vec{u},\, \vec{n}> = \lambda <\vec{n},\, \vec{n}>$, et en écrivant alors $s_{\overrightarrow{P}}(\vec{u}) = \vec{p} - \lambda\vec{n} = \vec{u} - 2\lambda\vec{n}$)

Le point de coordonnées $(3,0,0)$ appartenant à $\mathcal{P}$ (et étant donc fixe par $s_{\mathcal{P}}$), l'expression analytique cherchée est donc :

$$S_{\mathcal{P}} : M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \longmapsto M'\begin{pmatrix}\frac{1}{9}(7(x-3)-4y+4z)+3\\ \frac{1}{9}(-4(x-3)+y+8z)\\ \frac{1}{9}(4(x-3)+8y+z)\end{pmatrix} \text{ soit } M'\frac{1}{9}\begin{pmatrix}7x-4y+4z+6\\-4x+y+8z+12\\4x+8y+z-12\end{pmatrix}$$

$\boxed{\textbf{Exercice n°4}}$

1) La recherche d'un éventuel centre de symétrie conduit au système $\begin{cases}10x+8y-28 &= 0\\ 8x+10y-26 &= 0\end{cases}$.

Le point $\Omega(2,1)$ est donc centre de symétrie de $\mathcal{C}$. Dans le repère $(\Omega, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, une équation de $\mathcal{C}$ est $5X^2 + 8XY + 5Y^2 - 9 = 0$.

2) Soit A la matrice de la forme quadratique $(X,Y) \longmapsto 5X^2 + 8XY + 5Y^2$.

On a alors $P_A(X) = X^2 - 10X + 9$ et les valeurs propres de cette matrice sont donc 1 et 9. Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 (resp. 9) a pour équation $x + y = 0$ (resp. $x - y = 0$) et une base orthonormée de vecteurs propres est donc $(\vec{\imath}\,', \vec{\jmath}\,')$ où $\vec{\imath}\,' = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{\imath} - \vec{\jmath})$ et $\vec{\jmath}\,' = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{\imath} + \vec{\jmath})$.

Une équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $(\Omega, \vec{\imath}\,', \vec{\jmath}\,')$ est alors $x'^2 + 9y'^2 - 9 = 0$ soit $\frac{x'^2}{3^2} + \frac{y'^2}{1^2} = 1$.

Il s'agit de l'ellipse de foyer $F(2\sqrt{2}, 0)$, de directrice associée $\mathcal{D} : x = 9\frac{\sqrt{2}}{4}$ et d'excentricité $e = \frac{2}{3}\sqrt{2}$ (coordonnées exprimées dans le repère $(\Omega, \vec{\imath}\,', \vec{\jmath}\,')$.