Chapitre 2

Géométrie vectorielle euclidienne

2.1 Généralités sur les espaces vectoriels euclidiens

2.1.1 Espaces euclidiens

Définition 2.1 *On appelle espace vectoriel euclidien tout espace vectoriel réel, de dimension finie, muni d'un produit scalaire (c'est à dire d'une forme bilinéaire symétrique définie positive).*

Dans toute la suite, E est un espace vectoriel euclidien (de dimension n) dont le produit scalaire est noté $<.,.>$.

Remarque et notation. Pour tout x de E, $<x,x>$ est un réel positif. On peut donc poser $\|x\| = \sqrt{<x,x>}$.

Proposition 2.2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *Pour tous vecteurs x et y de E, on a $|<x,y>| \leq \|x\|.\|y\|$ avec égalité si et seulement si x et y sont liés.*

Démonstration : Soient x et y dans E. Pour tout λ de $\mathbb{R}$, on a $\|x+\lambda y\|^2 \geq 0$ (le produit scalaire est positif). Or, $\|x+\lambda y\|^2 = \|x\|^2 + 2\lambda <x,y> + \lambda^2\|y\|^2$. Si $\|y\|^2 = 0$, cela implique $<x,y> = 0$ et l'inégalité est vraie. Sinon, on a un trinôme du second degré toujours positif donc son discriminant est négatif. C'est le résultat voulu.
Il est clair que si x et y sont colinéaires on a égalité. Réciproquement, si y est nul, x et y sont évidemment colinéaires. Si on a égalité, et que y ne soit pas nul, le discriminant Δ est nul, donc l'équation a une racine (double) réelle λ_0 : $<x+\lambda_0 y, x+\lambda_0 y> = 0$ ce qui implique $x+\lambda_0 y = 0$ donc $x = -\lambda_0 y$. □

Conséquence. L'application $E \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \|x\|$ est une norme (*norme euclidienne*).

Démonstration : Il est clair que cette application est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et que pour tout x de E on a $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (le produit scalaire est défini positif). Soient $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. $\|\lambda x\| = \sqrt{<\lambda x, \lambda x>} = \sqrt{\lambda^2 <x,x>}$ donc $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$.
Montrons pour conclure l'inégalité triangulaire (dite *inégalité de Minkowski*). Soient $x, y \in E$. $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2<x,y> + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\,|<x,y>| + \|y\|^2$ et donc, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|.\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$. □

Exercice 2.1 Montrer que $\forall x, y \in E$, $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Étudier les cas d'égalité.

Propriété. *(Formule de polarisation)* Soient $x, y \in E$. Alors $<x,y> = \frac{1}{2}\Big(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\Big)$.

Exercice 2.2 Montrer que $\forall x, y \in E$, $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ (identité du parallélogramme).

2.1.2 Orthogonalité

Définitions 2.3

- *Deux vecteurs x et y de E sont dits orthogonaux si $<x,y>=0$. On note alors $x \perp y$.*
- *Deux parties A et B de E sont dites orthogonales si tout vecteur de A est orthogonal à tout vecteur de B. On note alors $A \perp B$.*
- *Si A est une partie de E, on appelle orthogonal de A la partie notée $A^\perp$ définie par $A^\perp = \{y \in E, \forall x \in A, <x,y>=0\}$.*

Propriétés.

- Pour toute partie A de E, $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E et $A^\perp = (\mathrm{Vect}(A))^\perp$.
- Soient A et B deux parties de E. Si $A \subset B$ alors $B^\perp \subset A^\perp$.

Proposition 2.4 *Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors F et $F^\perp$ sont supplémentaires dans E : $E = F \oplus F^\perp$. En particulier, on a $\dim F^\perp = n - \dim F$.*

Démonstration : Si x est dans l'intersection $F \cap F^\perp$, on a $<x,x>=0$ donc $x=0$. F et $F^\perp$ sont donc en somme directe et si $p = \dim F$ on a donc $\dim F^\perp \leq n-p$.
Pour montrer l'inégalité $\dim F^\perp \geq n-p$, on fixe une base $(e_1, \cdots, e_p)$ de F (le résultat est évident si $F = \{0\}$). On a alors, en vertu de la bilinéarité, $F^\perp = \{x \in E, \forall i \in \{1, \cdots, p\}, <x, e_i> = 0\}$. Autrement dit, si on considère l'application linéaire $\varphi : E \to \mathbb{R}^p$ définie par $\varphi(x) = (<x,e_1>, \cdots, <x,e_p>)$, $F^\perp$ n'est autre que le noyau de φ. On conclut en notant l'inégalité $\dim \mathrm{Im}\,\varphi \leq p$ et en appliquant le théorème du rang : $\dim \mathrm{Ker}\,\varphi + \dim \mathrm{Im}\,\varphi = \dim E$.
□

Corollaire. Si F est un sous-espace vectoriel de E alors $(F^\perp)^\perp = F$.

Exercice 2.3 Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Théorème 2.5 (Pythagore) *Soient $x, y \in E$.* $x \perp y \iff \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

2.1.3 Bases orthonormées

Rappel. *(Expression matricielle du produit scalaire)* Si $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E, on appelle matrice du produit scalaire dans cette base la matrice A de taille $n \times n$ et de coefficients $a_{ij} = <e_i, e_j>$. Si X et Y désignent les matrices colonnes des coordonnées $(x_1, \cdots, x_n)$ et $(y_1, \cdots, y_n)$ de deux vecteurs x et y dans cette base, alors $<x,y> = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = {}^tXAY$ où l'on identifie la matrice ${}^tXAY$ avec son unique coefficient.

Exercice 2.4 Si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$ sont deux bases de E, si A est la matrice du produit scalaire dans la base $\mathcal{B}$ et si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, montrer que la matrice du produit scalaire dans la base $\mathcal{B}'$ est ${}^tPAP$.

Définition 2.6 *Une famille $(e_1, \cdots, e_k)$ de vecteurs de E est dite orthogonale (resp. orthonormée) si les vecteurs e_i sont deux à deux orthogonaux (resp. normés et deux à deux orthogonaux).*

Exercice 2.5 Montrer que toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est libre.

Propriétés. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormée de E. Soient $x, y \in E$ de coordonnées respectives $(x_1, \cdots, x_n)$ et $(y_1, \cdots, y_n)$ dans $\mathcal{B}$. Alors,

$$\forall i,\ x_i = <x, e_i>\ , \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} <x, e_i>^{\ 2} \quad \text{et} \quad <x, y> = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Proposition 2.7 (Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt) *Soit $(e_1, \cdots, e_m)$ une famille libre de E. Il existe une unique famille orthonormée $(e'_1, \cdots, e'_m)$ vérifiant :*

$$\forall p \in \{1, \cdots, m\},\ Vect\{e'_1, \cdots, e'_p\} = Vect\{e_1, \cdots, e_p\} \quad et \quad <e_p, e'_p> > 0$$

Démonstration : Par récurrence sur p.
- On pose $e'_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$ (pas d'autre choix possible).
- On suppose avoir construit $(e'_1, \cdots, e'_p)$ et on construit e'_{p+1}. On cherche donc des réels α_i, pour $i \in \{1, \cdots, p\}$, et un réel β non nul tels que $e'_{p+1} = \beta e_{p+1} + \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \alpha_i e'_i$ (combinaison linéaire du nouveau vecteur et de ceux déjà construits).
Les relations $< e'_i, e'_{p+1} > = 0$ pour $i \in \{1, \cdots, p\}$ déterminent les α_i en fonction de β : $\alpha_i = -\beta <e'_i, e_{p+1}>$. La relation $\|e'_{p+1}\|^2 = 1$ donne alors $\beta^2 \left(\|e_{p+1}\|^2 - \displaystyle\sum_{i=1}^{p} <e'_i, e_{p+1}>^{\ 2} \right) = 1$.
Le coefficient de β^2 n'est pas nul. En effet, si on pose $F = \text{Vect}\{e'_1, \cdots, e'_p\} = \text{Vect}\{e_1, \cdots, e_p\}$, le vecteur e_{p+1} se décompose dans $E = F \oplus F^{\perp}$ sous la forme $e_{p+1} = (\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e'_i) + v$ avec, pour tout i de $\{1, \cdots, n\}$, $\lambda_i = <e_{p+1}, e'_i>$ et on a alors $\|e_{p+1}\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2 + \|v\|^2 = \sum_{i=1}^{p} <e'_i, e_{p+1}>^{\ 2} + \|v\|^2$.
Le coefficient de β^2 est donc $\|v\|^2 \neq 0$ car $v = 0$ entraînerait $e_{p+1} \in F$ ce qui est contraire à l'hypothèse de travail.
Par suite, β^2 est parfaitement déterminé.
Il ne reste alors que le signe de β à fixer. On veut $< e'_{p+1}, e_{p+1} >$ strictement positif et on a $<e'_{p+1}, e_{p+1}> = \dfrac{\|e'_{p+1}\|^2}{\beta}$. Cela impose donc β positif. □

Remarque. Dans la pratique, on commence souvent par orthogonaliser la famille et on la normalise ensuite.

Conséquence. Toute famille orthonormée peut se compléter en une base orthonormée et en particulier, tout espace euclidien admet des bases orthonormées.

2.2 Isométries vectorielles - Groupe orthogonal

2.2.1 Automorphismes orthogonaux

Proposition et Définition 2.8 *Soit E un espace vectoriel euclidien.*
Toute application $f : E \to E$ qui conserve le produit scalaire est linéaire et bijective. Une telle application est appelée automorphisme orthogonal de E.

Démonstration : Soit f un telle application. Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Par bilinéarité du produit scalaire, $\|f(x+\lambda y) - f(x) - \lambda f(y)\|^2 = \|f(x+\lambda y)\|^2 + \|f(x)\|^2 + \lambda^2 \|f(y)\|^2 - 2 <f(x+\lambda y), f(x)> -2\lambda <f(x+\lambda y), f(y)> +2\lambda <f(x), f(y)>$. Or f conserve le produit scalaire (et donc aussi la norme) donc $\|f(x+\lambda y) - f(x) - \lambda f(y)\|^2 = \|x+\lambda y\|^2 + \|x\|^2 + \lambda^2 \|y\|^2 - 2 <x+\lambda y, x> -2\lambda <x+\lambda y, y> +2\lambda <x, y> = \|x + \lambda y - x - \lambda y\|^2 = 0$ et donc $f(x+\lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$.
Enfin, comme $\|f(x)\| = \|x\|$, on a $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et l'endomorphisme f est injectif. E étant de dimension finie, on en déduit que f est bijectif. □

Exemples. L'identité de E et les symétries orthogonales sont des automorphismes orthogonaux.

Exercice 2.6 On rappelle qu'une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan. Montrer que, deux vecteurs unitaires distincts u et v de $\mathbb{R}^2$ étant donnés, il existe une unique réflexion échangeant u et v. Est-ce encore valable dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 2.7 Montrer que tout automorphisme orthogonal f conserve l'orthogonalité c'est à dire que $\forall x, y \in E$, $(x \perp y \Rightarrow f(x) \perp f(y))$. Suffit-il de conserver l'orthogonalité pour être un automorphisme orthogonal ?

Exercice 2.8 Montrer que si f est un automorphisme orthogonal alors pour tout sous-espace vectoriel F de E on a $f(F^\perp) = f(F)^\perp$. En déduire que si F est un sous-espace stable par f alors $F^\perp$ est également stable par f.

Exercice 2.9 Montrer qu'un endomorphisme f de E est un automorphisme orthogonal si et seulement si il transforme une (resp. toute) base orthonormée de E en une base orthonormée.

Traduction matricielle

Supposons l'espace E muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$. Soient f un automorphisme orthogonal et A sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. Soient $x, y \in E$ et X, Y les matrices colonnes de leurs coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. La relation caractérisant f se traduit alors par ${}^tXY = {}^t(AX)AY$ soit ${}^tXY = {}^tX\,{}^tAAY$ et ce pour tous X, Y. Cela revient donc à dire ${}^tA.A = I$.

Définition 2.9

Une matrice $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ est dite orthogonale si elle vérifie ${}^tA.A = I$.

Propriété. $f \in \mathcal{L}(E)$ est un automorphisme orthogonal si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée est orthogonale.

Exercice 2.10 Soit A une matrice orthogonale. Interpréter la relation ${}^tA.A = I$ sur les vecteurs colonnes (ou lignes) de la matrice A.

Proposition 2.10 *Soit f un automorphisme orthogonal de E (resp. A une matrice orthogonale). On a l'égalité* $\det f = \pm 1$ *(resp.* $\det A = \pm 1$*).*

Démonstration : Il suffit évidemment de traiter le cas de A. De la relation ${}^tA.A = I$ et des formules $\det(AB) = \det A \,.\det B$ et $\det {}^tA = \det A$ on déduit $\det({}^tA.A) = \det {}^tA \det A = (\det A)^2 = \det I = 1$. □

Exercice 2.11 Montrer que les seules valeurs propres (réelles) possibles d'un automorphisme orthogonal sont 1 et -1 et que les éventuels sous-espaces propres correspondants sont nécessairement orthogonaux.

2.2.2 Groupe orthogonal

Proposition et Définition 2.11 *L'ensemble des automorphismes orthogonaux de E est un groupe pour la composition des applications. Ce groupe est appelé groupe orthogonal de E et noté $\mathcal{O}(E)$. C'est un sous-groupe de $\mathcal{GL}(E)$.*

Démonstration : Il est clair que $\mathcal{O}(E)$ est une partie non vide (car contenant l'identité) de $\mathcal{GL}(E)$ stable par composition. Enfin, si f est un automorphisme orthogonal, pour tout (x, y) de E^2 on a $< f^{-1}(x), f^{-1}(y) > = < f\left[f^{-1}(x)\right], f\left[f^{-1}(y)\right] >$ et donc $< f^{-1}(x), f^{-1}(y) > = < x, y >$ et f^{-1} est bien dans $\mathcal{O}(E)$. □

Conséquence. L'ensemble des matrices orthogonales est un sous-groupe (multiplicatif) du groupe $\mathcal{GL}(n,\mathbb{R})$ des matrices inversibles encore appelé groupe orthogonal et noté $\mathcal{O}(n,\mathbb{R})$.

Proposition et Définition 2.12 *L'ensemble des automorphismes orthogonaux de E de déterminant +1 est un sous-groupe distingué de $\mathcal{O}(E)$ appelé groupe spécial orthogonal et noté $\mathcal{O}^+(E)$.*

Démonstration : Il suffit de remarquer que l'application Déterminant $\mathcal{O}(E) \longrightarrow \{\pm 1\}$ est un morphisme de groupes de noyau $\mathcal{O}^+(E)$. □

2.2.3 Notion d'isométrie

Un espace euclidien E est muni d'un produit scalaire donc d'une norme. Il possède donc une distance naturelle $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$, $(x,y) \mapsto d(x,y) = \|x-y\|$. Une isométrie de E est une application qui conserve la distance et donc :

Définition 2.13 *Soit E un espace vectoriel euclidien.*
On appelle isométrie de E toute application $f : E \to E$ qui conserve les distances c'est-à-dire qui vérifie : $\forall x, y \in E$, $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.

Proposition 2.14 *Une isométrie $f : E \to E$ qui laisse 0 fixe est un automorphisme orthogonal.*

Démonstration : Soit x dans E. $\|x\| = d(x,0) = d(f(x), f(0)) = d(f(x),0) = \|f(x)\|$ donc f conserve la norme. Pour $x, y \in E$ on a alors $d(f(x), f(y))^2 = d(x,y)^2$ donc $\|f(x) - f(y)\|^2 = \|x-y\|^2$ et en développant, $\|f(x)\|^2 - 2 < f(x), f(y) > +\|f(y)\|^2 = \|x\|^2 - 2 < x, y > +\|y\|^2$. Compte tenu de ce qui précède, f conserve donc le produit scalaire et le résultat découle du paragraphe précédent. □

Proposition 2.15 *Soit E un espace vectoriel euclidien.*
Les isométries de E sont les applications $g : E \to E$ du type $t \circ f$ où t est une translation et f un automorphisme orthogonal.

Démonstration : Il est déjà clair qu'une translation de vecteur a est une isométrie puisque pour tous x, y de E on a $d(x+a, y+a) = \|x+a-y-a\| = d(x,y)$.
$\underline{\Leftarrow :}$ Montrons qu'un tel g est une isométrie. Soient $x, y \in E$.
$d(g(x), g(y)) = d(t(f(x)), t(f(y))) = d(f(x), f(y)) = \|f(x-y)\| = \|x-y\| = d(x,y)$.
$\underline{\Rightarrow :}$ Soit $g : E \to E$ une isométrie. Soit $a = g(0)$. $t_{-a} \circ g$ est une isométrie de E (comme composée de deux isométries) qui fixe 0 donc est un endomorphisme orthogonal. □

Remarque. Les automorphismes orthogonaux sont donc les isométries linéaires.

Définition 2.16 *Les éléments de $\mathcal{O}^+(E)$ sont appelés isométries (linéaires) positives (elles ont pour déterminant +1) ou encore isométries directes (elles transforment une base orthonormée directe en une base orthonormée directe). Les éléments de $\mathcal{O}^-(E) = \mathcal{O}(E) \backslash \mathcal{O}^+(E)$ sont appelés isométries négatives (ou indirectes).*

2.3 Classification des isométries vectorielles en dimension 2

Proposition 2.17 *Soit f un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^2$. Alors la matrice de f dans une base orthonormée est de la forme* $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\varepsilon\sin\theta \\ \sin\theta & \varepsilon\cos\theta \end{pmatrix}$ *où $\theta \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \{\pm 1\}$.*

Démonstration : Soient $\mathcal{B}$ une base orthonormée et $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$: A est une matrice orthogonale. Par suite, A est de la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $a^2 + c^2 = 1 = b^2 + d^2$ et $ab + cd = 0$. La surjectivité de la fonction cosinus $\mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$ assure alors l'existence d'un réel θ tel que $a = \cos\theta$ et $c = \sin\theta$ et de même l'existence d'un réel φ tel que $b = \cos\varphi$ et $d = \sin\varphi$. L'égalité $ab + cd = 0$ s'écrit alors $\cos(\theta - \varphi) = 0$ soit $\varphi = \theta - \frac{\pi}{2} - k\pi$ et le résultat annoncé en découle. □

Théorème 2.18 *Soit f un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^2$.*

- *ou bien $f \in \mathcal{O}^-(\mathbb{R}^2)$ et f est une réflexion (f est diagonalisable, de valeurs propres 1 et -1, et f est la réflexion d'axe le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 1).*
- *ou bien $f \in \mathcal{O}^+(\mathbb{R}^2)$ et f est la composée de deux réflexions : on dit que f est une rotation. (Si en outre $f \neq \pm\, id$ alors f n'a aucun autre élément fixe que 0 et f n'est pas diagonalisable).*

Démonstration :

- si $f \in \mathcal{O}^-(\mathbb{R}^2)$ alors $\varepsilon = -1$ et le polynôme caractérisique de f est $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ qui est scindé à racines simples donc f est diagonalisable, de valeurs propres 1 et -1. Dans une base de vecteurs propres, la matrice de f est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ où $\theta \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ et comme $E_1(f) \perp E_{-1}(f)$ (vérification immédiate) f est bien la réflexion d'axe $E_1(f)$.
- Soit $f \in \mathcal{O}^+(\mathbb{R}^2)$ (c'est à dire $\varepsilon = 1$). La matrice de f dans une base orthonormée est de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et si g désigne l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans la même base alors g est une réflexion et la matrice de $g \circ f$ dans cette base est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$: c'est la matrice d'une isométrie indirecte et donc $g \circ f$ est une réflexion h. Par suite $f = g \circ h$ est la composée de deux réflexions. D'autre part, le polynôme caractérisique de f est $X^2 - 2\cos\theta X + 1$ qui est irréductible sauf si $\cos\theta = \pm 1$.

□

Proposition 2.19 *Le groupe $\mathcal{O}^+(2, \mathbb{R})$ est isomorphe au groupe multiplicatif $\mathcal{U}$ des nombres complexes de module 1 et également isomorphe au groupe additif $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.*

Démonstration : On vérifie que $(\mathcal{U}, \times) \longrightarrow (\mathcal{O}^+(2, \mathbb{R}), \circ)$, $z = a + ib \longmapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ est un isomorphisme de groupes.
On fait de même avec $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathcal{U}, \times)$, $\theta \longmapsto e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. □

2.4 Classification des isométries vectorielles en dimension 3

Proposition 2.20 *Soit f un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^3$. Alors les valeurs propres de f sont toutes de module 1. De plus, en supposant $f \neq \pm\, id$,*

- *si* $\det A = +1$ *alors 1 est valeur propre d'ordre 1 ou 3, dim$(E_1) = 1$, $\Pi = E_1^{\perp}$ est stable par f et f/Π est une rotation.*
- *si* $\det A = -1$ *alors -1 est valeur propre d'ordre 1 ou 3, dim$(E_{-1}) = 1$, $\Pi = E_{-1}^{\perp}$ est stable par f et f/Π est une rotation.*

Démonstration : Soit λ une valeur propre de A (vue comme matrice à coefficients complexes) et X une matrice colonne non nulle telle que $AX = \lambda X$. En passant au conjugué puis en transposant, il vient ${}^t\bar{X}\,{}^tA = \bar{\lambda}\,{}^t\bar{X}$. En multipliant alors à droite par AX on obtient (puisque ${}^tA.A = I$) ${}^t\bar{X}.X = |\lambda|^2\,{}^t\bar{X}.X$ d'où le résultat.

- On suppose $\det A = +1$. Si les trois valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de A sont réelles, alors on a $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = +1$ avec $\lambda_i = \pm 1$ et 1 est bien valeur propre d'ordre 1 ou 3. Si l'une des valeurs propres (par exemple λ_2) n'est pas réelle alors sa conjuguée est aussi valeur propre (c'est par exemple λ_3) et donc $+1 = \det A = \lambda_1\lambda_2\overline{\lambda_2} = \lambda_1$. Supposons par l'absurde $\dim(E_1)$ différente de 1. Comme A n'est pas la matrice identité, on déduit que le sous-espace propre E_1 n'est pas de dimension trois donc qu'il est de dimension deux (1 est alors valeur propre triple). Soient alors (v_1, v_2) une base de E_1 et $u \in D\backslash\{0\}$ où $D = (E_1)^\perp$. Pour $i \in \{1, 2\}$ on a alors $< f(u), v_i > = < f(u), f(v_i) > = < u, v_i > = 0$ donc $f(u) \in D$ et par suite $f(u) = \lambda u$ pour un certain scalaire λ. On a alors $f(u) = u$ (1 est la seule valeur propre) et $u \in E_1$ ce qui est absurde.
  Soient $x \in \Pi$ et v un vecteur non nul de E_1. On a $< f(x), v > = < f(x), f(v) > = < x, v > = 0$ donc $f(x) \in \Pi$. Π est donc bien stable par f.
  Soit $\tilde{f} = f/\Pi$. Pour x, y dans Π on a $< \tilde{f}(x), \tilde{f}(y) > = < f(x), f(y) > = < x, y >$ donc $\tilde{f}$ est orthogonale. De plus, si (u_1, u_2) est une base de Π et v un vecteur non nul de E_1, la matrice de f dans la base (u_1, u_2, v) s'écrit $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = M(\tilde{f})_{(u_1,u_2)}$.
  Le déterminant étant invariant par changement de base, on déduit $\det(\tilde{f}) = +1$ et $\tilde{f}$ est donc bien une rotation.

- On suppose $\det A = -1$. Si les trois valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de A sont réelles, alors on a $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -1$ avec $\lambda_i = \pm 1$ et -1 est bien valeur propre d'ordre 1 ou 3. Si l'une des valeurs propres (par exemple λ_2) n'est pas réelle alors sa conjuguée est aussi valeur propre (c'est par exemple λ_3) et donc $-1 = \det A = \lambda_1\lambda_2\overline{\lambda_2} = \lambda_1$. Le même raisonnement que ci-dessus s'applique en remplaçant 1 par -1 et E_1 par E_{-1}.

□

Théorème 2.21 *Soit f un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^3$. Il existe une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est de la forme :*

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

De plus, si $f \neq \pm id$,

- *ou bien ($\det A = -1$ et $Tr(A) = 1$) et f est une réflexion (par rapport au plan E_1).*

- *ou bien $\det A = +1$ et f est la composée de deux réflexions par rapport à des plans contenant la droite E_1 : on dit que f est une rotation autour de l'axe E_1.*

- *ou bien ($\det A = -1$ et $Tr(A) \neq 1$) et f est la composée commutative d'une rotation autour de l'axe E_{-1} et de la réflexion par rapport au plan $E_{-1}^\perp$. 1 n'est alors pas valeur propre de f et on dira que f est une réflexion-rotation (ou une anti-rotation).*

Démonstration : La forme de la matrice de f résulte de la proposition précédente.

- Si $\det A = -1$ et $\mathrm{Tr}(A) = 1$ alors -1 est valeur propre de f et si λ et μ sont les autres valeurs propres (complexes) de f, on a $\lambda + \mu - 1 = 1$ (invariance de la trace par changement de base) et $\lambda\mu(-1) = -1$ (invariance du déterminant) et donc $\lambda = \mu = 1$. Si e'_2 désigne alors un vecteur propre normé associé à la valeur propre 1 et e'_1 un vecteur tel que (e'_1, e'_2, e_3) soit orthonormée, la matrice de f dans cette base est de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ c & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et est orthogonale donc $b = c = 0$ et $a = 1$: f est bien une réflexion.

- Si $\det A = 1$, on peut écrire $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et f est bien une composée de deux réflexions par rapport à des plans contenant la droite $E_1 = \mathrm{Vect}(\{e_3\})$.

- Si $\det A = -1$ et $\mathrm{Tr}(A) \neq 1$, la matrice de f dans la base orthonormée (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
et le résultat en découle (on remarque que le produit est bien commutatif).

□

Détermination d'une rotation en dimension 3

Soit f une rotation de E (distincte de l'identité) autour d'un axe $\mathcal{D}$ dirigé par le vecteur unitaire $\overrightarrow{n}$. On a vu que $\mathcal{P} = \mathcal{D}^\perp$ est stable par f et que si (e_1, e_2) est une base orthonormée de $\mathcal{P}$ la matrice de f dans la base orthonormé $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \overrightarrow{n})$ de E est de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Par invariance de la trace, $\mathrm{Tr}(f) = 2\cos\theta + 1$. D'autre part si $x \in E \backslash \mathcal{D}$ a pour matrice colonne de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$ alors $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(x, f(x), \overrightarrow{n}) = \begin{vmatrix} a & a\cos\theta - b\sin\theta & 0 \\ b & a\sin\theta + b\cos\theta & 0 \\ c & c & 1 \end{vmatrix} = (a^2 + b^2)\sin\theta$ donc $\sin\theta$ est du signe de $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(x, f(x), \overrightarrow{n})$. Ce déterminant sera le même dans toute base orthonormée de même orientation que $\mathcal{B}$ (la matrice de passage ayant alors un déterminant égal à $+1$). Dans la pratique, on impose à la base $\mathcal{B}$ d'être orthonormée directe ce qui revient à choisir dans le plan $\mathcal{P}$ l'orientation induite par le choix du vecteur $\overrightarrow{n}$ (voir paragraphe suivant). La rotation f est alors parfaitement déterminée par la donnée du vecteur $\overrightarrow{n}$ et du réel θ : on notera $f = r_{\overrightarrow{\mathcal{D}}, \theta}$.

Remarques.

- Pour tout vecteur x normé de $\mathcal{P}$ on a $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(x, f(x), \overrightarrow{n}) = \sin\theta$ et ce dans toute base orthonormée directe de E.

- Changer $\overrightarrow{n}$ en son opposé revient à changer θ en son opposé.

Exercice 2.12 On se place dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice dans la base canonique de la rotation $r_{\overrightarrow{\mathcal{D}}, \frac{\pi}{6}}$ où $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ est la droite dirigée et orientée par $\overrightarrow{n}(1, -1, 2)$.

2.5 Produit mixte et produit vectoriel en dimension 3

2.5.1 Orientation

On définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de E en considérant que deux bases sont en relation si la matrice de passage de l'une à l'autre a un déterminant positif (strictement).

On dit alors que deux telles bases sont de même orientation. Cette relation d'équivalence ne comporte deux classes et *orienter* E c'est choisir l'une de ces classes dont les éléments seront dits *bases directes* (les bases de l'autre classe étant dites *indirectes*). Dans la pratique, pour orienter E, il suffit de se fixer une base de E (considérée alors comme directe).

Remarque. Le fait qu'un espace euclidien E, de dimension 3, soit orienté, n'induit aucune orientation naturelle des plans de E. L'orientation de chaque plan de E est déterminée par la donnée d'un vecteur n'appartenant pas à ce plan (théorème de la base incomplète).

2.5.2 Produit mixte

Proposition et Définition 2.22 *Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3. Le déterminant de trois vecteurs u, v, w de E dans une base orthonormée directe est indépendant du choix de cette base orthonormée directe. On l'appelle produit mixte de u, v, w et on le note $[u, v, w]$.*

Démonstration : Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases orthonormées directes alors la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est orthogonale et de déterminant positif et donc $\det(P) = +1$.
Or, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u, v, w) = P.\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u, v, w)$ et donc $\det(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u, v, w)) = \det(\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u, v, w))$. □

Remarque. Le produit mixte est donc une forme trilinéaire alternée.

2.5.3 Produit vectoriel

Théorème et définition 2.23 *Pour tout couple (u, v) de vecteurs de E, il existe un unique vecteur x tel que*

$$\forall w \in E,\ [u, v, w] = <x, w>$$

Ce vecteur x est noté $u \wedge v$ et appelé produit vectoriel de u par v.

Démonstration : Si u et v sont liés alors pour tout w de E on a $[u, v, w] = 0$ et le seul vecteur x vérifiant $\forall w,\ <x, w> = 0$ est le vecteur nul.
Supposons donc u et v libres.
Si un tel vecteur x existe, il est clair que $<x, u> = <x, v> = 0$ et donc $x \in (\mathrm{Vect}\{u, v\})^{\perp}$. Si n désigne un vecteur directeur unitaire de la droite $(\mathrm{Vect}\{u, v\})^{\perp}$, on peut alors écrire $x = \lambda n$ et la relation caractérisant x devient, lorsqu'on choisit $w = n$, $[u, v, n] = <\lambda n, n> = \lambda$. Cela prouve l'unicité. Réciproquement, on vérifie que $x = [u, v, n].n$ convient : tout vecteur w de E s'écrit $w = au + bv + cn$ car (u, v, n) est une base de E et par suite, $[u, v, w] = c[u, v, n] = <x, w>$. □

Remarque. On a donc : $\forall u, v, w \in E,\ [u, v, w] = <u \wedge v, w>$.

Proposition 2.24 *Le produit vectoriel $\wedge : E \times E \to E$ est bilinéaire et antisymétrique (i.e. $u \wedge v = -v \wedge u$).*

Démonstration : Cela résulte du théorème précédent et des propriétés du déterminant. Fixons par exemple $u, u', v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout w de E on a alors :

$$[u + \lambda u', v, w] = [u, v, w] + \lambda[u', v, w] = <u \wedge v, w> + \lambda <u' \wedge v, w>$$

soit $[u + \lambda u', v, w] = <u \wedge v + \lambda u' \wedge v, w>$ et donc $(u + \lambda u') \wedge v = u \wedge v + \lambda u' \wedge v$.
De même, $[u, v, w] = -[v, u, w] = - <v \wedge u, w>$ et donc $u \wedge v = -v \wedge u$. □

Propriétés. Soient $u, v \in E$.

- $u \wedge v \perp u$ et $u \wedge v \perp v$.
- $u \wedge v = \overrightarrow{0}$ si et seulement si u et v sont colinéaires.
- Si u et v sont linéairement indépendants alors $(u, v, u \wedge v)$ est une base directe.

Démonstration : Les deux premiers points résultent de manière immédiate de la définition. Enfin, si u et v sont linéairement indépendants, $(u, v, u \wedge v)$ est une base de E (d'après le premier point) et $[u, v, u \wedge v] =< u \wedge v, u \wedge v > = \|u \wedge v\|^2 > 0$ donc cette base est directe. □

Proposition 2.25 (Expression dans une base orthonormée directe) *Soit* $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ *une base orthonormée directe de* E *alors* $\overrightarrow{\imath} \wedge \overrightarrow{\jmath} = \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{\jmath} \wedge \overrightarrow{k} = \overrightarrow{\imath}$ *et* $\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{\imath} = \overrightarrow{\jmath}$. *De plus, si les vecteur* u *et* v *ont pour composantes* (u_1, u_2, u_3) *et* (v_1, v_2, v_3) *dans cette base alors* $u \wedge v$ *a pour composantes* $\left(\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & v_3 \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_3 \end{vmatrix} \right) = (u_2 v_3 - v_2 u_3, u_3 v_1 - v_3 u_1, u_1 v_2 - v_1 u_2)$.

Démonstration : Le premier point est une conséquence de la définition puisque par exemple $\overrightarrow{\imath} \wedge \overrightarrow{\jmath}$ est orthogonal à $\overrightarrow{\imath}$ et à $\overrightarrow{\jmath}$ donc colinéaire à $\overrightarrow{k}$ et que $1 = [\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}] = < \overrightarrow{\imath} \wedge \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k} >$. Le produit vectoriel étant bilinéaire antisymétrique, le dernier point est alors clair puisque $u = u_1 \overrightarrow{\imath} + u_2 \overrightarrow{\jmath} + u_3 \overrightarrow{k}$ et $v = v_1 \overrightarrow{\imath} + v_2 \overrightarrow{\jmath} + v_3 \overrightarrow{k}$. □

Exercice 2.13 Soit la rotation $r = r_{\overrightarrow{\mathcal{D}}, \theta}$ où $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ est la droite dirigée et orientée par le vecteur unitaire $\overrightarrow{n}$. Montrer que pour tout $\overrightarrow{x}$ de $\mathcal{D}^\perp$ on a $r(\overrightarrow{x}) = (\cos\theta)\overrightarrow{x} + (\sin\theta)\, \overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{x}$. Montrer de même que pour tout $\overrightarrow{x}$ de E on a $r(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} + (\sin\theta)\, \overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{x} + (1 - \cos\theta)\, \overrightarrow{n} \wedge (\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{x})$.