Chapitre 4

Isométries dans un espace affine euclidien

Dans tout le chapitre, X désigne un espace affine euclidien, c'est-à-dire un espace affine dont l'espace vectoriel associé $\overrightarrow{X}$ est euclidien.

4.1 Généralités sur les isométries

Un espace affine euclidien est muni d'une distance naturelle : $d(x, y) = \|\overrightarrow{xy}\|$ et on peut donc parler d'isométrie.

Définition 4.1 *On appelle isométrie de X toute application $f : X \to X$ qui conserve la distance c'est à dire qui vérifie : $\forall m, n \in X$, $\|\overrightarrow{mn}\| = \|\overrightarrow{f(m)f(n)}\|$.*

Exemple. Toute symétrie orthogonale de X *(et en particulier toute réflexion)* est une isométrie.

Démonstration : Soit f une symétrie orthogonale d'axe Y. f est alors affine et son application linéaire associée $\overrightarrow{f}$ est la réflexion d'axe $\overrightarrow{Y}$. Soient alors $m, n \in X$. $\overrightarrow{mn}$ se décompose dans $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{Y} \oplus \overrightarrow{Y}^{\perp}$ en $\overrightarrow{mn} = u + v$ avec u dans F et v dans $F^{\perp}$. Le théorème de Pythagore montre que : $\|\overrightarrow{mn}\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$. D'autre part, $\overrightarrow{f}\overrightarrow{m)n} = u - v$ et donc $\|\overrightarrow{f(m)f(n)}\|^2 = \|\overrightarrow{f}\overrightarrow{m)n}\|^2 = \|u - v\|^2$. Le théorème de Pythagore permet alors de conclure. $\square$

Remarque. *(hyperplan médiateur)* Étant donnés deux point distincts A et B de X, l'ensemble des points équidistants de A et B est l'hyperplan passant par le milieu I de $[AB]$ et orthogonal à (AB).
Démonstration : Soit $M \in X$. $d(A, M) = d(B, M) \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AM}\|^2 = \|\overrightarrow{BM}\|^2$ et donc, en introduisant I par la relation de Chasles, $d(A, M) = d(B, M) \Leftrightarrow <\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{IM}> = <\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BM}>$ soit $d(A, M) = d(B, M) \Longleftrightarrow <\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IM}> = 0$. $\square$

Proposition 4.2 *Toute isométrie $f : X \to X$ est une application affine.*

Démonstration : Fixons un point O dans X et considérons $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{X} \to \overrightarrow{X}$, $\overrightarrow{u} \mapsto \overrightarrow{f(O)f(M)}$ où $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM}$. Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{X}$ ($\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{ON}$). On a :

$$\begin{aligned}
2\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}).\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) &= \|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})\|^2 + \|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})\|^2 - \|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) - \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})\|^2 \\
&= \|\overrightarrow{f(O)f(M)}\|^2 + \|\overrightarrow{f(O)f(N)}\|^2 - \|\overrightarrow{f(N)f(M)}\|^2 \\
&= \|\overrightarrow{OM}\|^2 + \|\overrightarrow{ON}\|^2 - \|\overrightarrow{NM}\|^2 \quad \text{car } f \text{ est une isométrie} \\
&= \|\overrightarrow{OM}\|^2 + \|\overrightarrow{ON}\|^2 - \|\overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OM}\|^2 \\
&= 2\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}
\end{aligned}$$

$\overrightarrow{f}$ conserve donc le produit scalaire. On en déduit (proposition 2.8) la linéarité de $\overrightarrow{f}$. $\square$

Proposition 4.3 *Une application affine $f : X \to X$ est une isométrie si et seulement si son application linéaire associée $\overrightarrow{f}$ est une isométrie.*

Démonstration : Le sens direct est clair au vu de ce qui précède car un automorphisme orthogonal est une isométrie. Réciproquement, si $\overrightarrow{f}$ est une isométrie, pour tous $m, n \in X$, $\|\overrightarrow{f(m)f(n)}\| = \|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{mn})\| = \|\overrightarrow{mn}\|$ et f est bien une isométrie. $\square$

Définition 4.4 *Une isométrie f de X est dite directe ou positive (respectivement indirecte ou négative) si $\overrightarrow{f}$ l'est. On définit de même le déterminant de f comme étant celui de $\overrightarrow{f}$.*

Proposition 4.5 *Toute isométrie $f : X \to X$ se décompose de manière unique sous la forme $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ g$ où*

- *g est une isométrie de X admettant au moins un point fixe,*
- *$t_{\overrightarrow{u}}$ est une translation commutant avec g.*

Démonstration : Soit $y \in \operatorname{Im}\left(\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{X}}\right)$. y s'écrit alors $y = \overrightarrow{f}(z) - z$. Soit d'autre part $x \in \operatorname{Ker}\left(\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{X}}\right)$. On a $< x, y > = < \overrightarrow{f}(x), \overrightarrow{f}(z) > - < x, z > = 0$ car $\overrightarrow{f}$ est un automorphisme orthogonal. Par suite, $\operatorname{Im}\left(\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{X}}\right) \perp \operatorname{Ker}\left(\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{X}}\right)$ et ces deux sous-espaces sont donc en somme directe. Le théorème du rang permet alors d'en déduire que $\overrightarrow{X} = \operatorname{Ker}\left(\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{X}}\right) \oplus \operatorname{Im}\left(\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{X}}\right)$. Le théorème 1.25 s'applique alors et f s'écrit de manière unique sous la forme $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ g$ avec g admettant un point fixe et commutant avec $t_{\overrightarrow{u}}$. On conclut en remarquant que $g = t_{-\overrightarrow{u}} \circ f$ est une isométrie. $\square$

4.2 Isométries du plan affine euclidien

4.2.1 Isométries et réflexions

Théorème 4.6 *(Classification des isométries du plan par les points fixes) Soient X un plan affine euclidien et f une isométrie de X. On rappelle qu'une rotation est une composée de deux réflexions dont les axes sont soit confondus, soit sécants en un point.*

- *S'il existe trois points a_1, a_2 et a_3* non alignés *fixés par f (i.e $f(a_1) = a_1$, $f(a_2) = a_2$ et $f(a_3) = a_3$), alors f est l'identité.*
- *Si f fixe deux points distincts a_1 et a_2 alors f est soit l'identité soit la réflexion d'axe $(a_1 a_2)$.*
- *Si f fixe le point a_1 de X alors f est soit l'identité, soit une réflexion dont l'axe passe par a_1, soit une rotation qui laisse a_1 invariant.*
- *Toute isométrie du plan est composée d'au plus trois réflexions.*

Démonstration :

- La démonstration se fait par l'absurde.

  Supposons que f ne soit pas l'identité. Il existe donc un point m de X tel que $m' = f(m)$ soit *distinct* de m. L'ensemble des points équidistants de m et m' est une droite Δ. Soit $i \in \{1, 2, 3\}$. f est une isométrie donc $d(f(a_i), f(m)) = d(a_i, m)$ et comme $f(a_i) = a_i$, $d(a_i, m') = d(a_i, m)$. Ce qui montre que a_i appartient à Δ. Cela est contraire à l'hypothèse a_1, a_2 et a_3 non alignés.

- Supposons que f ne soit pas l'identité. Il existe donc un point b tel que $b' = f(b) \neq b$. Soit D la médiatrice de b et b'. Comme f est une isométrie $d(f(o), f(b)) = d(o, b)$, soit encore $d(o, b') = d(o, b)$ et o appartient à D. De même on montre que a appartient à D. Il en résulte aussi que o, a, b ne sont pas alignés. Soit s la réflexion d'axe D et $g = s \circ f$. Il est clair que $g(o) = o$, $g(a) = a$ et $g(b) = s(f(b)) = s(b') = b$. Ayant trois points fixes non alignés g est l'identité. L'égalité $s \circ f = Id$ implique $f = s$ (en composant à gauche par s).

- Soit f une isométrie telle que $f(o) = o$. Si $f = Id$, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc que $f \neq Id$. Il existe donc un point a tel que $f(a) \neq a$, ce qui implique $o \neq a$. Soit $b = f(a)$; on a $d(o, a) = d(o, b)$ car f est une isométrie. Soit alors s la réflexion qui fixe o et telle que $s(b) = a$. Considérons $g = s \circ f$ qui vérifie $g(o) = o$ et $g(a) = a$. La question précédente montre que ou bien $g = Id$ ou bien g est la réflexion s' d'axe (oa). Dans le premier cas $s \circ f = Id$, ce qui implique $f = s$. Dans le second cas $s \circ f = s'$, ce qui implique $f = s \circ s'$ et f est bien une rotation puisque les deux axes des réflexions passent par o.

- Soit f une isométrie. Si $f = Id$, c'est, pour toute réflexion s, la composée $s \circ s$. Si f n'est pas l'identité, il existe un point o tel que $o' = f(o) \neq o$. Soit s la réflexion telle que $s(o) = o'$ et $g = s \circ f$ qui vérifie $g(o) = o$. La question précédente montre que ou bien g est une réflexion s' ou bien g est la composée de deux réflexions $s' \circ s''$. Dans le premier cas l'égalité $s \circ f = s'$ implique $f = s \circ s'$ et dans le second l'égalité $s \circ f = s' \circ s''$ implique $f = s \circ s' \circ s''$.

□

Corollaire. L'ensemble $Is(X)$ des isométries de X est un groupe et pour tout point o de X, l'ensemble $Is_o(X)$ des isométries de X fixant o est un sous-groupe de $Is(X)$.

Démonstration : L'ensemble des isométries est contenu dans le groupe des bijections de X, stable par composition, contenant Id. Il reste donc à démontrer que si f est une isométrie, alors f^{-1} est aussi une isométrie. Ceci résulte de la question précédente : si $s_1, \ldots, s_p$ sont des réflexions et $f = s_1 \circ \ldots \circ s_p$ alors $f^{-1} = s_p \circ \ldots \circ s_1$.
Le fait que Is_o est un sous-groupe de $Is(X)$ résulte d'un cas général : si un groupe G opère sur un ensemble X, pour tout point o de X le groupe d'isotropie de o (appelé aussi stabilisateur de o), noté G_o en général, défini par $G_o = \{g \in G \mid g(o) = o\}$ est un sous groupe de G. □

4.2.2 Catalogue des isométries du plan

Le théorème précédent permet de faire un catalogue des isométries du plan. Outre **l'identité** il y a donc :

Les réflexions

Remarquons que si f est la réflexion d'axe $\mathcal{D}$ alors $\overrightarrow{f}$ est la réflexion d'axe $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ et si o est un point de $\mathcal{D}$, f est caractérisée par : $\forall m \in X$, $f(m) = o + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{om})$ et en particulier f est l'application de X dans X qui à tout point m associe lui même si $m \in \mathcal{D}$ et l'unique point m' tel que $\mathcal{D}$ soit la médiatrice de $[mm']$ sinon.

Les translations

Proposition 4.7 *La composée de deux réflexions par rapport à des droites parallèles est une translation. Plus précisément, si $\mathcal{D}_2 /\!/ \mathcal{D}_1$ alors $s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1} = t_{\overrightarrow{2H_1H_2}}$ où H_1 est un point quelconque de $\mathcal{D}_1$ et H_2 le projeté orthogonal de H_1 sur $\mathcal{D}_2$.*
Réciproquement, toute translation $t_{\overrightarrow{u}}$ peut s'écrire comme composée $s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1}$ de deux réflexions d'axes parallèles ($\mathcal{D}_1$ étant choisie arbitrairement mais orthogonale à $\overrightarrow{u}$ et $\mathcal{D}_2$ étant alors $\mathcal{D}_2 = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{u}}(\mathcal{D}_1)$).

Démonstration : Le premier point est clair puisque l'application linéaire associée à $s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1}$ est $s_{\overrightarrow{\mathcal{D}_2}} \circ s_{\overrightarrow{\mathcal{D}_1}} = id_{\overrightarrow{X}}$. Soient alors $H_1 \in \mathcal{D}_1$ et H_2 le projeté orthogonal de H_1 sur $\mathcal{D}_2$. $s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1}(H_1) = s_{\mathcal{D}_2}(H_1) = H_2 + s_{\overrightarrow{\mathcal{D}}_2}(\overrightarrow{H_2H_1})$ donc $s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1}(H_1) = H_2 - \overrightarrow{H_2H_1} = H_1 + 2\overrightarrow{H_1H_2}$. Enfin, si $\mathcal{D}_1$ est orthogonale à $\overrightarrow{u}$ et $\mathcal{D}_2 = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{u}}(\mathcal{D}_1)$ alors $\mathcal{D}_2 /\!/ \mathcal{D}_1$ et $s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1} = t_{\overrightarrow{u}}$ puisque le projeté orthogonal d'un point H_1 de $\mathcal{D}_1$ sur $\mathcal{D}_2$ n'est autre que $H_2 = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{u}}(H_1)$. □

Les rotations

Soit $r \neq id$ une rotation du plan. r est la composée de deux réflexions d'axes $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sécants en un point A. Remarquons tout de suite que A est le seul point fixe de r (il est appelé *centre* de la rotation) : si B est un point fixe de r alors $s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1}(B) = B$ donc $s_{\mathcal{D}_2}(B) = s_{\mathcal{D}_1}(B)$. Si on pose C ce dernier point, on ne saurait avoir $C \neq B$ car alors l'unicité de la réflexion envoyant B sur C conduirait à $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_1$ donc à $r = id$. Par suite $C = B \in \mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}_1$.
r est alors caractérisée par son centre et son application linéaire associée $s_{\overrightarrow{\mathcal{D}_2}} \circ s_{\overrightarrow{\mathcal{D}_1}}$ qui est une rotation vectorielle $\overrightarrow{r}$. $\overrightarrow{r}$ est entièrement déterminée par son angle θ et on notera finalement $r = r_{A,\theta}$ et on parlera de la rotation de centre A et d'angle θ.

Proposition 4.8 *La rotation $r = r_{A,\theta}$ est l'application de X dans X qui à tout point M associe lui même si $M = A$ et l'unique point M' vérifiant $AM = AM'$ et $(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}}) = \theta$ sinon.*

Démonstration : Si $r = r_{A,\theta}$ on a bien $r(A) = A$ et pour $M \neq A$, $Ar(M) = r(A)r(M) = AM$ (r est une isométrie) et $(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{Ar(M)}}) = (\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{r}(\overrightarrow{AM})}) = \theta$.
Réciproquement, pour $M \neq A$, les relations $AM = AM'$ et $(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}}) = \theta$ définissent bien un unique point M'. En effet, θ peut s'écrire sous la forme $\theta = (\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{v}})$ avec $\|\overrightarrow{v}\| = AM$ et l'unicité de la rotation envoyant un vecteur non nul sur un vecteur de même norme conduit à $\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{v}$. □

Proposition 4.9 *Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites sécantes en un point A. Soient $\overrightarrow{u_1} \in \overrightarrow{\mathcal{D}_1} \backslash \{\overrightarrow{0}\}$ et $\overrightarrow{u_2} \in \overrightarrow{\mathcal{D}_2} \backslash \{\overrightarrow{0}\}$ alors $s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1} = r_{A,2(\widehat{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}})}$.*
Réciproquement, toute rotation de centre A et d'angle θ peut se décomposer sous la forme $r_{A,\theta} = s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1}$ où $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont deux droites sécantes en A, l'une d'entre-elles pouvant être choisie arbitrairement (passant par A).

Démonstration : Le premier point est clair : A est bien un point fixe de r et si on pose $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{r}(\overrightarrow{u_1}) = s_{\overrightarrow{\mathcal{D}_2}}(u_1)$ on a $\theta = (\widehat{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{r}(\overrightarrow{u_1})}) = (\widehat{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}}) + (\widehat{\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v}})$ d'où, les réflexions inversant les angles, $\theta = (\widehat{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}}) + (\widehat{s_{\overrightarrow{\mathcal{D}_2}}(\overrightarrow{u_2}), s_{\overrightarrow{\mathcal{D}_2}}(\overrightarrow{u_1})}) = (\widehat{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}}) - (\widehat{\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_1}})$.
Soient réciproquement $r_{A,\theta}$ une rotation et, par exemple, $\mathcal{D}_1$ une droite passant par A. Introduisons un vecteur unitaire $\overrightarrow{u_1}$ de $\mathcal{D}_1$ et un angle orienté de vecteurs α solution de l'équation $2\alpha = \theta$ (l'existence d'un tel angle a été vue en exercice). α peut s'écrire $\alpha = (\widehat{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}})$ et il est alors clair que la droite $\mathcal{D}_2$ passant par A et dirigée par $\overrightarrow{u_2}$ est telle que $r_{A,\theta} = s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1}$. □

Exercice 4.1 Montrer que l'ensemble des rotations du plan fixant le point A est un groupe pour la composition des applications.

Exercice 4.2 Que peut-on dire de la composée de deux rotations du plan ? Cette composée est-elle commutative ?

Les symétries glissées

Définition 4.10 *Soient $\mathcal{D}$ une droite de X (plan affine euclidien) et $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{D}}\backslash\{0\}$. On appelle* **symétrie glissée** *d'axe $\mathcal{D}$ et de vecteur $\overrightarrow{u}$, la composéee $t_{\overrightarrow{u}} \circ s_{\mathcal{D}}$.*

Remarques. Cette composée est commutative d'après la proposition 1.24 puisque l'on a $\mathrm{Ker}\left(\overrightarrow{s_{\mathcal{D}}} - id_{\overrightarrow{X}}\right) = \overrightarrow{\mathcal{D}}$. En particulier, si f est une symétrie glissée, $f^2 = t_{2\overrightarrow{u}}$ où $\overrightarrow{u}$ est le vecteur de cette symétrie glissée. Une symétrie glissée n'a donc pas de point fixe.

Lemme 4.11 *La composée d'une réflexion d'axe $\mathcal{D}$ et d'une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est une réflexion d'axe parallèle à $\mathcal{D}$ si $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{\mathcal{D}}$ et une symétrie glissée sinon.*

Démonstration : Supposons tout d'abord $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{\mathcal{D}}$. On a vu qu'alors la translation $t_{\overrightarrow{u}}$ pouvait se décomposer sous la forme $t_{\overrightarrow{u}} = s_{\mathcal{D}} \circ s_{\mathcal{D}'}$ avec $\mathcal{D}'//\mathcal{D}$. Par suite, $s_{\mathcal{D}} \circ t_{\overrightarrow{u}} = s_{\mathcal{D}'}$.
Soit à présent un vecteur quelconque $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{X} = \overrightarrow{\mathcal{D}} \oplus \overrightarrow{\mathcal{D}}^{\perp}$ que l'on écrit $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ avec $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{D}}$ et $\overrightarrow{w} \in \overrightarrow{\mathcal{D}}^{\perp}$. $\overline{s_{\mathcal{D}} \circ t_{\overrightarrow{u}}} = \overline{s_{\mathcal{D}} \circ t_{\overrightarrow{w}}} \circ t_{\overrightarrow{v}} = \overline{s_{\mathcal{D}'} \circ t_{\overrightarrow{v}}}$ où (d'après ce qui précède) $\mathcal{D}' /\!\!/ \mathcal{D}$: c'est bien une symétrie glissée lorsque $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$. □

Proposition 4.12 *La composée de trois réflexions du plan est ou bien une réflexion ou bien une symétrie glissée.*

Démonstration : Soit donc $f = s_{\mathcal{D}_3} \circ s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1}$. Si $\mathcal{D}_3 /\!\!/ \mathcal{D}_2$ alors $s_{\mathcal{D}_3} \circ s_{\mathcal{D}_2}$ est une translation. Si $\mathcal{D}_3 \cap \mathcal{D}_2 = \{A\}$ alors $s_{\mathcal{D}_3} \circ s_{\mathcal{D}_2}$ est une rotation de centre A qui peut se décomposer sous la forme $s_{\mathcal{D}} \circ s_{\mathcal{D}'}$ où $\mathcal{D}'$ est la parallèle à $\mathcal{D}_1$ passant par A. Dans les deux cas, on se ramène donc à la composée d'une translation et d'une réflexion et le résultat annoncé découle du lemme précédent. □

Tableau récapitulatif

Classification des isométries d'un plan affine euclidien X

Nom du déplacement	Notation	Isom. vect.	Ens. des points fixes
Identité	id_X	$id_{\overrightarrow{X}}$	X
Translation de vecteur $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$	$t_{\overrightarrow{u}}$	$id_{\overrightarrow{X}}$	$\emptyset$
Rotation de centre A, d'angle θ (non nul)	$R_{A,\theta}$	$\overrightarrow{r_\theta}$	$\{A\}$
Nom de l'anti-déplacement	**Notation**	**Isom. vect.**	**Ens. des points fixes**
Réflexion d'axe $\mathcal{D}$	$s_{\mathcal{D}}$	$s_{\overrightarrow{\mathcal{D}}}$	$\mathcal{D}$
Symétrie glissée d'axe $\mathcal{D}$, de vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{D}}\backslash\{\overrightarrow{0}\}$	$t_{\overrightarrow{u}} \circ s_{\mathcal{D}}$	$s_{\overrightarrow{\mathcal{D}}}$	$\emptyset$

Exercice 4.3 Redonner la liste de toutes les isométries du plan affine à partir de la proposition 4.5 et du catalogue des isométries du plan vectoriel.

4.3 Isométries de l'espace affine euclidien

4.3.1 Isométries et réflexions

Théorème 4.13 *Soient X un espace affine euclidien de dimension 3 et f une isométrie de X.*

- *S'il existe quatre points a_1, a_2, a_3 et a_4* non coplanaires *fixés par f (i.e $f(a_1) = a_1$, $f(a_2) = a_2$, $f(a_3) = a_3$ et $f(a_4) = a_4$), alors f est l'identité.*
- *Si f fixe trois points non alignés a_1, a_2 et a_3 alors f est soit l'identité soit la réflexion d'axe le plan défini par ces trois points.*

- *Si f fixe deux points distincts a_1 et a_2 alors f est soit l'identité, soit une réflexion d'axe un plan contenant (a_1a_2), soit une composée de deux réflexions dont les axes contiennent (a_1a_2) (une telle isométrie est appelée* **rotation** *autour de (a_1a_2)).*

- *Si f fixe le point a_1 de X alors f est soit l'identité, soit une réflexion dont l'axe passe par a_1, soit une rotation qui laisse a_1 invariant, soit la composée de trois réflexions dont les axes contiennent a_1.*

- *Toute isométrie de l'espace est composée d'au plus quatre réflexions.*

Démonstration : La démonstration est similaire à celle effectuée dans le plan : Soit f une isométrie fixant quatre points non coplanaires A_1, A_2, A_3, A_4. Supposons que f ne soit pas l'identité et soit alors M tel que $M \neq f(M)$. Si $\mathcal{P}$ désigne le plan médiateur de M et $f(M)$, $\forall i \in \{1, \cdots, 4\}$, $d(A_i, M) = d(f(A_i), f(M)) = d(A_i, f(M))$ donc $A_i \in \mathcal{P}$ ce qui est contradictoire.
De même, si f fixe trois points non alignés A_1, A_2, A_3 et si f n'est pas l'identité alors, avec les mêmes notations, $\forall i \in \{1, \cdots, 3\}$, $A_i \in \mathcal{P}$ donc $\mathcal{P} = (A_1A_2A_3)$ avec $M \notin \mathcal{P}$. Par suite, $s_{\mathcal{P}} \circ f$ fixe les quatre points non coplanaires A_1, A_2, A_3, M donc est l'identité et finalement $f = s_{\mathcal{P}}$.
Si f fixe deux points distincts A_1, A_2 et si f n'est pas l'identité, on a toujours $A_1, A_2 \in \mathcal{P}$ et $M \notin \mathcal{P}$ et donc $s_{\mathcal{P}} \circ f$ fixe les trois points non alignés A_1, A_2, M donc $s_{\mathcal{P}} \circ f = id$ ou $s_{\mathcal{P}} \circ f = s_{(A_1A_2M)}$ et finalement $f = s_{\mathcal{P}}$ ou $f = s_{\mathcal{P}} \circ s_{(A_1A_2M)}$.
Si f fixe le point A_1 et si f n'est pas l'identité, on a toujours $A_1 \in \mathcal{P}$ et $M \notin \mathcal{P}$ et donc $s_{\mathcal{P}} \circ f$ fixe les deux points distincts A_1 et M donc $s_{\mathcal{P}} \circ f = id$ ou $s_{\mathcal{P}} \circ f = s_{\mathcal{P}_1}$ ou $s_{\mathcal{P}} \circ f = s_{\mathcal{P}_1} \circ s_{\mathcal{P}_2}$ et finalement $f = s_{\mathcal{P}}$ ou $f = s_{\mathcal{P}} \circ s_{\mathcal{P}_1}$ ou $f = s_{\mathcal{P}} \circ s_{\mathcal{P}_1} \circ s_{\mathcal{P}_2}$.
Soit finalement f une isométrie quelconque. Si f n'est pas l'identité (composée d'une réflexion avec elle-même), $s_{\mathcal{P}} \circ f$ fixe le point M donc est la composée d'au plus trois réflexions. Par suite, f est la composée d'au plus quatre réflexions. □

4.3.2 Catalogue des isométries de l'espace

Le théorème précédent permet de faire un catalogue des isométries de l'espace. Outre **l'identité** il y a donc :

Les réflexions

Remarquons que si f est la réflexion d'axe $\mathcal{P}$ alors $\overrightarrow{f}$ est la réflexion d'axe $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et si o est un point de $\mathcal{P}$, f est caractérisée par : $\forall m \in X$, $f(m) = o + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{om})$ et en particulier f est l'application de X dans X qui à tout point m associe lui même si $m \in \mathcal{P}$ et l'unique point m' tel que $\mathcal{P}$ soit le plan médiateur de $[mm']$ sinon.

Les translations

Proposition 4.14 *La composée de deux réflexions par rapport à des plans parallèles est une translation. Plus précisément, si $\mathcal{P}_2 /\!/ \mathcal{P}_1$ alors $s_{\mathcal{P}_2} \circ s_{\mathcal{P}_1} = t_{2\overrightarrow{H_1H_2}}$ où H_1 est un point quelconque de $\mathcal{P}_1$ et H_2 le projeté orthogonal de H_1 sur $\mathcal{P}_2$.*
Réciproquement, toute translation $t_{\overrightarrow{u}}$ peut s'écrire comme composée $s_{\mathcal{P}_2} \circ s_{\mathcal{P}_1}$ de deux réflexions d'axes parallèles ($\mathcal{P}_1$ étant choisie arbitrairement mais orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\mathcal{P}_2$ étant alors $\mathcal{P}_2 = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{u}}(\mathcal{P}_1)$).

Démonstration : La démonstration est similaire à celle donnée dans le plan. □

Les rotations

Soit $r \neq id$ une rotation de l'espace. r est la composée de deux réflexions d'axes $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sécants suivant une droite $\mathcal{D}$. Remarquons tout de suite que $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points fixes de r (il est appelé *axe* de la rotation) : si B est un point fixe de r alors $s_{\mathcal{P}_2} \circ s_{\mathcal{P}_1}(B) = B$ donc $s_{\mathcal{P}_2}(B) = s_{\mathcal{P}_1}(B)$. Si on pose C ce dernier point, on ne saurait avoir $C \neq B$ car alors l'unicité de la réflexion envoyant B sur C conduirait à $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1$ donc à $r = id$. Par suite $C = B \in \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_1$. r est alors caractérisée par son axe et son application linéaire associée $s_{\overrightarrow{\mathcal{P}_2}} \circ s_{\overrightarrow{\mathcal{P}_1}}$ qui est une rotation vectorielle $\overrightarrow{r}$. Ce qui précède montre que $\overrightarrow{\mathcal{D}} = E_1(\overrightarrow{r})$ et donc le plan $\overrightarrow{\mathcal{P}} = \overrightarrow{\mathcal{D}}^{\perp}$ est stable par $\overrightarrow{r}$ (proposition 2.20) et la restriction de $\overrightarrow{r}$ à $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ est une rotation vectorielle caractérisée par son angle θ appelé **angle** de la rotation r. On notera finalement $r = r_{\mathcal{D},\theta}$ et on parlera de la rotation d'axe $\mathcal{D}$ et d'angle θ.

Remarque. La notation $r = r_{\mathcal{D},\theta}$ sous-entend donc que θ est un angle orienté de vecteurs du plan $\overrightarrow{\mathcal{P}} = \overrightarrow{\mathcal{D}}^{\perp}$.

Proposition 4.15 *La rotation $r = r_{\mathcal{D},\theta}$ est l'application de X dans X qui à tout point M associe le point M' image de M par la rotation du plan $\mathcal{P}$ de centre m et d'angle θ où $\mathcal{P}$ est le plan orthogonal à $\mathcal{D}$ passant par M et m le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$.*

Proposition 4.16 *Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans sécants suivant une droite $\mathcal{D}$.*
Soient $\overrightarrow{u_1} \in \overrightarrow{\mathcal{P}_1} \cap \overrightarrow{\mathcal{D}}^{\perp} \backslash \{\overrightarrow{0}\}$ et $\overrightarrow{u_2} \in \overrightarrow{\mathcal{P}_2} \cap \overrightarrow{\mathcal{D}}^{\perp} \backslash \{\overrightarrow{0}\}$ alors $s_{\mathcal{P}_2} \circ s_{\mathcal{P}_1} = r_{\mathcal{D},2(\widehat{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}})}$.
Réciproquement, toute rotation r d'axe $\mathcal{D}$ peut se décomposer sous la forme $r = s_{\mathcal{P}} \circ s_{\mathcal{P}_1} = s_{\mathcal{P}_2} \circ s_{\mathcal{P}}$ où $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}$ sont des plans contenant $\mathcal{D}$, $\mathcal{P}$ étant choisi arbitrairement (contenant $\mathcal{D}$).

Démonstration : Le premier point est clair : $\mathcal{D}$ est bien l'ensemble des point fixes de r et, puisque $\overrightarrow{u_1} \in \overrightarrow{\mathcal{D}}^{\perp}$, l'angle de cette rotation est $\theta = (\widehat{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{r}(\overrightarrow{u_1})})$. On a donc $\theta = (\widehat{\overrightarrow{u_1}, s_{\overrightarrow{P}_2}(\overrightarrow{u_1})})$ soit $\theta = (\widehat{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}}) + (\widehat{\overrightarrow{u_2}, s_{\overrightarrow{P}_2}(\overrightarrow{u_1})})$. La restriction de $s_{\overrightarrow{P}_2}$ à $\overrightarrow{\mathcal{D}}^{\perp}$ étant une réflexion de ce plan et les réflexions inversant les angles, on a finalement $\theta = 2(\widehat{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}})$.
Soient réciproquement $r_{\mathcal{D},\theta}$ une rotation et $\mathcal{P}$ un plan contenant $\mathcal{D}$. Introduisons un vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ de $\overrightarrow{\mathcal{P}} \cap \overrightarrow{\mathcal{D}}^{\perp}$ et un vecteur unitaire $\overrightarrow{u_2}$ de $\overrightarrow{\mathcal{D}}^{\perp}$ tel que $2(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u_2}}) = \theta$. Il est alors clair que le plan $\mathcal{P}_2$ contenant $\mathcal{D}$ et de direction contenant $\overrightarrow{u_2}$ est tel que $r_{\mathcal{D},\theta} = s_{\mathcal{P}_2} \circ s_{\mathcal{P}}$.
Ce résultat appliqué à la rotation $r^{-1} = r_{\mathcal{D},-\theta}$ conduit à l'écriture $r_{\mathcal{D},\theta} = s_{\mathcal{P}} \circ s_{\mathcal{P}_1}$. □

Exercice 4.4 Montrer que l'ensemble des rotations d'axe $\mathcal{D}$ donné, en y incluant l'identité, est un groupe pour la composition des applications.

Les symétries glissées

Définition 4.17 *Soient $\mathcal{P}$ un plan de X (espace affine euclidien) et $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}} \backslash \{0\}$. On appelle* **symétrie glissée** *d'axe $\mathcal{P}$ et de vecteur $\overrightarrow{u}$, la composéee $t_{\overrightarrow{u}} \circ s_{\mathcal{P}}$.*

Remarques. Cette composée est commutative d'après la proposition 1.24 puisque l'on a $\mathrm{Ker}\left(\overrightarrow{s_{\mathcal{P}}} - id_{\overrightarrow{X}}\right) = \overrightarrow{\mathcal{P}}$. En particulier, si f est une symétrie glissée, $f^2 = t_{2\overrightarrow{u}}$ où $\overrightarrow{u}$ est le vecteur de cette symétrie glissée. Une symétrie glissée n'a donc pas de point fixe.

Lemme 4.18 *La composée d'une réflexion d'axe $\mathcal{P}$ et d'une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est une réflexion d'axe parallèle à $\mathcal{P}$ si $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{\mathcal{P}}$ et une symétrie glissée sinon.*

Démonstration : Supposons tout d'abord $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{\mathcal{P}}$. On a vu qu'alors la translation $t_{\overrightarrow{u}}$ pouvait se décomposer sous la forme $t_{\overrightarrow{u}} = s_{\mathcal{P}} \circ s_{\mathcal{P}'}$ avec $\mathcal{P}' // \mathcal{P}$. Par suite, $s_{\mathcal{P}} \circ t_{\overrightarrow{u}} = s_{\mathcal{P}'}$.
Soit à présent un vecteur quelconque $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{X} = \overrightarrow{\mathcal{P}} \oplus \overrightarrow{\mathcal{P}}^{\perp}$ que l'on écrit $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ avec $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$

et $\overrightarrow{w} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}^{\perp}$. $s_{\mathcal{P}} \circ t_{\overrightarrow{u}} = s_{\mathcal{P}} \circ t_{\overrightarrow{w}} \circ t_{\overrightarrow{v}} = s_{\mathcal{P}'} \circ t_{\overrightarrow{v}}$ où (d'après ce qui précède) $\mathcal{P}' /\!/ \mathcal{P}$: c'est bien une symétrie glissée lorsque $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$. □

Les réflexions-rotations

Définition 4.19 *Soient $\mathcal{P}$ un plan de X (espace affine euclidien), $\mathcal{D}$ une droite orthogonale à $\mathcal{P}$ et θ un angle orienté de vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. On appelle* **réflexion-rotation** *(ou encore anti-rotation) de plan $\mathcal{P}$, d'axe $\mathcal{D}$ et d'angle θ, la composéee $s_{\mathcal{P}} \circ r_{\mathcal{D},\theta}$.*

Proposition 4.20 *Soit $f = s_{\mathcal{P}} \circ r_{\mathcal{D},\theta}$ une anti-rotation. Alors la composée $s_{\mathcal{P}} \circ r_{\mathcal{D},\theta}$ est commutative et de plus, si θ n'est pas l'angle nul, f a un unique point fixe.*

Démonstration : Posons $g = r_{\mathcal{D},\theta} \circ s_{\mathcal{P}}$. Il est déjà clair que le point d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ est fixe par f et par g. D'autre part, $r_{\overrightarrow{\mathcal{D}},\theta}$ laisse $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ globalement invariant donc, pour tout u de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$, on a $\overrightarrow{f}(u) = r_{\overrightarrow{\mathcal{D}},\theta}(u) = \overrightarrow{g}(u)$. Comme d'autre part pour $u \in \overrightarrow{\mathcal{D}}$, $\overrightarrow{f}(u) = s_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}(u) = -u$ et $\overrightarrow{g}(u) = r_{\overrightarrow{\mathcal{D}},\theta}(-u) = -u$, on a finalement $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{g}$ et donc $f = g$.
Si θ n'est pas l'angle nul alors $\mathrm{Tr}(\overrightarrow{f}) = -1 + 2\cos\theta \neq 1$ et donc 1 n'est pas valeur propre de $\overrightarrow{f}$ (les valeurs propres de $\overrightarrow{f}$ seraient sinon nécessairement $-1, 1$ et $\ldots 1$!). Par suite, (théorème 1.21) f a un unique point fixe. □

Proposition 4.21 *La composée de trois réflexions de l'espace est ou une réflexion ou une symétrie glissée ou une réflexion-rotation.*

Démonstration : Soit donc $f = s_{\mathcal{P}_3} \circ s_{\mathcal{P}_2} \circ s_{\mathcal{P}_1}$. L'isométrie vectorielle $\overrightarrow{f}$ est alors négative. Si $\overrightarrow{f}$ est une réflexion alors ou bien f a un point fixe et f est une réflexion, ou bien f n'a pas de point fixe mais peut se décomposer sous la forme $t_u \circ g$ avec g isométrie admettant un point fixe : f est alors une symétrie glissée. Si $\overrightarrow{f}$ n'est pas une réflexion alors c'est une anti-rotation vectorielle et 1 ne pouvant alors être valeur propre de $\overrightarrow{f}$, f a un unique point fixe : c'est une anti-rotation. □

Les vissages

Définition 4.22 *Soient $\mathcal{D}$ une droite de X (espace affine euclidien de dimension 3), θ un angle orienté de vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{D}}^{\perp}$ et $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{D}} \backslash \{0\}$. On appelle* **vissage** *ou* **déplacement hélicoïdal** *d'axe $\mathcal{D}$, d'angle θ, de vecteur $\overrightarrow{u}$, la composéee commutative $t_{\overrightarrow{u}} \circ R_{\mathcal{D},\theta}$.*

Remarque. Cette composée est bien commutative puisque $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Ker}\left(\overrightarrow{r_{\mathcal{D},\theta}} - id_{\overrightarrow{X}}\right) = \overrightarrow{\mathcal{D}}$.

Proposition 4.23 *La composée d'une rotation d'angle non nul, d'axe $\mathcal{D}$ et d'une translation de vecteur orthogonal à cet axe est une rotation d'axe parallèle à $\mathcal{D}$.*

Démonstration : Considérons donc $f = t_{\overrightarrow{v}} \circ R_{D,\theta}$ avec $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{D}$ et $\theta \neq 0$. Soit $\mathcal{P}$ le plan contenant $\mathcal{D}$ et de vecteur normal $\overrightarrow{v}$. La translation de vecteur $\overrightarrow{v}$ peut se décomposer sous la forme $t_{\overrightarrow{v}} = s_{\mathcal{P}_1} \circ s_{\mathcal{P}}$ avec $\mathcal{P}_1 /\!/ \mathcal{P}$. De même, la rotation considérée peut se décomposer sous la forme $r_{\mathcal{D},\theta} = s_{\mathcal{P}} \circ s_{\mathcal{P}_2}$ avec $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}_2 = \mathcal{D}$. Finalement, $f = s_{\mathcal{P}_1} \circ s_{\mathcal{P}_2}$ est une rotation d'axe $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 /\!/ \mathcal{D}$. □

Théorème 4.24 *Les déplacements de $\mathcal{X}$ sont les translations, les rotations et les vissages.*

Démonstration : Il est clair que toute translation, rotation, vissage est un déplacement. Réciproquement, soit f un déplacement de $\mathcal{A}$. Fixons un point A de $\mathcal{A}$ d'image A' par f. Le déplacement $g = t_{\overrightarrow{A'A}} \circ f$ fixe A donc est l'identité (et $f = t_{\overrightarrow{AA'}}$) ou une rotation : $g = R_{D,\theta}$.

Dans ce dernier cas, en décomposant $\overrightarrow{A'A}$ dans $\overrightarrow{D} \oplus \overrightarrow{D}^{\perp}$ sous la forme $\overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, on a alors $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ (t_{\overrightarrow{v}} \circ g)$. Le résultat en découle puisque $t_{\overrightarrow{v}} \circ g$ est une rotation d'axe $\mathcal{D}'$ parallèle à $\mathcal{D}$ et que $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{D'} = \overrightarrow{D}$: $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ R_{D',\theta}$ est un vissage. □

Exercice 4.5 Soit $\mathcal{A}$ un espace affine euclidien orienté de dimension trois rapporté au repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$. Soit $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ l'application affine qui à tout point M de coordonnées (x, y, z) associe le point $M'(-y, z+1, -x+1)$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

4.3.3 Tableau récapitulatif

Classification des déplacements dans un espace affine $\mathcal{A}$ de dimension trois

Nom du déplacement	Notation	Isom. vect.	Points fixes
Identité	Id	$\overrightarrow{Id}$	X
Rotation d'axe $\mathcal{D}$, d'angle θ (non nul)	$r_{D,\theta}$	$r_{\overrightarrow{D},\theta}$	Droite $\mathcal{D}$
Vissage d'axe $\mathcal{D}$, d'angle θ, de vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{D}} \backslash \{\overrightarrow{0}\}$	$t_{\overrightarrow{u}} \circ r_{D,\theta}$	$r_{\overrightarrow{D},\theta}$	$\emptyset$
Translation de vecteur $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$	$t_{\overrightarrow{u}}$	$\overrightarrow{Id}$	$\emptyset$

Classification des anti-déplacements dans un espace affine $\mathcal{A}$ de dimension trois

Nom de l'anti-déplacement	Notation	Isom. vect.	Points fixes
Réflexion par rapport au plan $\mathcal{P}$	$s_{\mathcal{P}}$	$s_{\overrightarrow{P}}$	Plan $\mathcal{P}$
Anti-rotation d'axe $\mathcal{D}$, d'angle θ, de plan $\mathcal{P} \perp \mathcal{D}$	$r_{D,\theta} \circ s_{\mathcal{P}}$	$r_{\overrightarrow{D},\theta} \circ s_{\overrightarrow{D}^{\perp}}$	$\{A\} = \mathcal{D} \cap \mathcal{P}$
Symétrie glissée d'axe $\mathcal{P}$ de vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}} \backslash \{\overrightarrow{0}\}$	$t_{\overrightarrow{u}} \circ s_{\mathcal{P}}$	$s_{\overrightarrow{P}}$	$\emptyset$

4.4 Isométries conservant une partie

Proposition 4.25 *Soient X un espace affine euclidien et Γ une partie non vide de X. L'ensemble des isométries f de X telles que $f(\Gamma) = \Gamma$ est un groupe appelé groupe des isométries de Γ.*

Démonstration : C'est une partie non vide (elle contient l'identité) du groupe des isométries de X, clairement stable par composition et par passage à l'inverse. □

Exemple. *Le groupe du rectangle*
Soit $\Gamma = \{A, B, C, D\}$ l'ensemble des quatre sommets d'un rectangle non aplati $ABCD$. Toute isométrie de Γ est affine donc conserve l'isobarycentre O des quatre points A, B, C, D. D'autre part, le segment $[AB]$ étant envoyé par une isométrie sur un segment de même longueur, son milieu I est ou bien fixe ou bien envoyé sur le milieu J de $[DC]$. La classification des isométries du plan permet alors d'affirmer que l'ensemble des isométries du rectangle est constitué de l'identité, de la symétrie de centre O, de la réflexion d'axe (IJ) et de la réflexion d'axe la médiatrice de $[IJ]$. Ce groupe est commutatif et isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (*groupe de Klein*).