Chapitre 5

Coniques dans le plan affine euclidien

Dans tout le chapitre, X désigne un plan affine euclidien.

5.1 Définition monofocale des coniques

5.1.1 Définition et premières propriétés

Définition 5.1

- *Soient $\mathcal{D}$ une droite, F un point du plan non situé sur $\mathcal{D}$ et e un réel strictement positif. On appelle conique Γ de foyer F, de directrice associée $\mathcal{D}$ et d'excentricité e, l'ensemble :*

$$\Gamma = \{M \in X,\ MF = ed(M, \mathcal{D})\}$$

  - *Si $e < 1$, on dit que Γ est une* ellipse *;*
  - *Si $e = 1$, on dit que Γ est une* parabole *;*
  - *Si $e > 1$, on dit que Γ est une* hyperbole.

- *On appelle axe focal de Γ, la droite Δ passant par F et perpendiculaire à $\mathcal{D}$. On note K le projeté orthogonal de F sur $\mathcal{D}$.*

- *On note $d = d(F, \mathcal{D})$. Le réel $p = ed$ est appelé paramètre de Γ.*

Remarques.

- Puisque $F \notin \mathcal{D}$, on a $d > 0$ donc $p > 0$;
- Aucun point de $\mathcal{D}$ n'appartient à Γ.

Proposition 5.2 *L'axe focal Δ est un axe de symétrie de Γ.*

Démonstration : Soient K le projeté orthogonal de F sur $\mathcal{D}$ et $M \in \Gamma$. Notons M' le symétrique de M par la réflexion d'axe Δ et H, H' les projetés orthgonaux respectifs de M, M' sur $\mathcal{D}$.

- Δ est la médiatrice de $[MM']$, $F \in \Delta$, donc $MF = M'F$.
- Notons I le milieu de $[MM']$, $I \in \Delta$. $MHKI$ et $M'H'KI$ sont des rectangles d'où $MH = KI$ et $M'H' = KI$. On en déduit $MH = M'H'$ d'où $M'F = MF = eMH = eM'H'$ et par suite $M' \in \Gamma$.

Notons s la réflexion d'axe Δ. On a donc montré que $s(\Gamma) \subset \Gamma$. Et en composant par s on a $s(s(\Gamma)) \subset s(\Gamma)$, i.e. $\Gamma \subset s(\Gamma)$ d'où finalement $s(\Gamma) = \Gamma$. □

Proposition 5.3 • *L'intersection d'une parabole avec son axe focal est réduite à un point qui est le milieu du segment $[F\,K]$. Ce point est appelé* **sommet** *de la parabole.*

- *L'intersection d'une ellipse ou d'une hyperbole Γ avec son axe focal est réduite aux deux points A et A' où A est le barycentre du système de points pondérés $\{(F,1),(K,e)\}$ et A' le barycentre de $\{(F,1),(K,-e)\}$.*

Démonstration : Pour le premier point, on suppose que Γ est une parabole, c'est-à-dire que $e=1$. Dire $M\in\Delta\cap\Gamma$ équivaut à dire que $M\in\Delta$ et $MF=d(M,D)$, ce qui équivaut à $M\in\Delta$ et $MF=MK$ (les points de Δ se projettent en K), ce qui revient à dire que M est à l'intersection de la médiatrice de $[KF]$ et de Δ. Le seul point solution est donc le milieu de $[KF]$.
Pour le deuxième point, on suppose que $e\neq 1$. Dire $M\in\Delta\cap\Gamma$ équivaut à dire que $M\in\Delta$ et $MF^2=e^2MH^2$ soit $<\overrightarrow{MF}-e\overrightarrow{MK},\overrightarrow{MF}+e\overrightarrow{MK}>=0$. Pour $M\in\Delta$, les points M,K,F sont alignés et le dernier point équivaut alors à $\overrightarrow{MF}-e\overrightarrow{MK}=\overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{MF}+e\overrightarrow{MK}=\overrightarrow{0}$ (de manière générale, on a $<\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}>=\|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|\cos(\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})})$ et ici $\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}$ est nul ou plat) ce qui revient bien à dire que M est le barycentre de $\{(F,1),(K,e)\}$ (on a $1+e\neq 0$) ou celui de $\{(F,1),(K,-e)\}$ (on a $1-e\neq 0$). □

Exercice 5.1 Montrer que la parabole Γ de directrice $\mathcal{D}$ et de foyer F est le lieu des centres des cercles tangents à $\mathcal{D}$ et passant par F.

5.1.2 Équation réduite

Proposition 5.4 *Soit Γ une conique du plan. Il existe un repère orthonormé du plan dans lequel Γ a pour équation : $(1-e^2)x^2+y^2-2(x_F-e^2x_K)x=e^2x_K^2-x_F^2$. Plus précisément,*

- *si $e=1$, il existe un repère orthonormé du plan dans lequel Γ a pour équation : $y^2=2px$.*
- *si $e\neq 1$, il existe un repère orthonormé du plan dans lequel Γ a pour équation : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2(1-e^2)}=1$.*

Démonstration : Fixons un vecteur unitaire $\overrightarrow{\imath}$ dirigeant l'axe focal Δ et soit alors $\overrightarrow{\jmath}$ un vecteur unitaire tel que $(\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$ soit une base orthonormée. Pour tout point O de Δ, le repère $(O,\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$ est orthonormé. Dans ce repère, la directrice $\mathcal{D}$ a pour équation $x=x_K$ et F a pour coordonnées $(x_F,0)$. Si (x,y) désignent les coordonnées d'un point M du plan, on a alors

$$\begin{aligned}M\in\Gamma &\iff MF^2=d(M,\mathcal{D})^2\\ &\iff (x_F-x)^2+y^2=e^2(x-x_K)^2\\ &\iff (1-e^2)x^2+y^2-2(x_F-e^2x_K)x=e^2x_K^2-x_F^2\end{aligned}$$

Si $e=1$, en choisissant pour origine O le milieu de $[FK]$ (en sorte que $x_K=-x_F$) et en prenant $\overrightarrow{\imath}$ de même direction que $\overrightarrow{OF}$, cette équation devient $y^2=4x_Fx=2px$ (car $x_F>0$).
Si $e\neq 1$, on choisit pour origine le barycentre O du système de points pondérés $\{(F,1),(K,-e^2)\}$. On a alors $\overrightarrow{OF}-e^2\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{0}$ et donc $x_F=e^2x_K$ et l'équation précédente s'écrit donc $(1-e^2)x^2+y^2=e^2x_K^2-e^4x_K^2$ d'où le résultat en posant $a=ex_K\neq 0$. □

Proposition 5.5 *Une conique du plan coupe toute droite du plan en au plus deux points.*

Démonstration : Soient donc Γ une conique (d'excentricité e) et D une droite.
Si $e=1$, dans un repère bien choisi Γ a pour équation $y^2=2px$. Dans ce repère, D a une équation du type $x=\alpha$ ou du type $y=\alpha x+\beta$. La recherche des points d'intersection conduit

dans le premier cas au système $\left\{\begin{array}{ll} y^2 & = 2px \\ x & = \alpha \end{array}\right.$ qui a bien au plus deux solutions. Le second cas conduit au système $\left\{\begin{array}{ll} y^2 & = 2px \\ y & = \alpha x + \beta \end{array}\right.$ qui admet une unique solution si $(\alpha, \beta) = (0, 0)$. Dans le cas contraire, le polynôme $\alpha^2 x^2 + (2\alpha\beta - 2p)x + \beta^2$ étant non nul et de degré au plus 2, le système admet au plus deux solutions.
Si $e \neq 1$, on raisonne de même, le dernier cas conduisant au polynôme $x^2(1 - e^2 + \alpha^2) + 2\alpha\beta x + \beta^2 - a^2(1 - e^2) = 0$: si $\alpha^2 = e^2 - 1$ alors le terme constant est $\beta^2 + a^2\alpha^2 \neq 0$ en sorte que ce polynôme est non nul et de degré au plus 2. □

Proposition et Définition 5.6 *Toute conique d'excentricité $e \neq 1$ admet un unique centre de symétrie appelé* **centre** *de la conique.*

Démonstration : La forme de l'équation trouvée ci-dessus montre que, dans ce repère, l'origine est centre de symétrie. Supposons que Ω soit un autre centre de symétrie de la conique Γ. La composée des deux symétries centrales $f = s_O \circ s_\Omega$ conserve globalement Γ. Comme $f = t_{2\overrightarrow{\Omega O}}$, nécessairement $\overrightarrow{\Omega O} = \overrightarrow{0}$ (une droite ne pouvant contenir une infinité de points de Γ). □

Exercice 5.2 Montrer qu'une parabole n'a pas de centre de symétrie.

5.1.3 La parabole

On a vu qu'une parabole $\mathcal{P}$ de foyer F, de directrice associée $\mathcal{D}$ et d'excentricité e admet pour équation réduite (dans un repère orthonormé bien choisi) : $y^2 = 2px$ avec $p > 0$. Réciproquement, la courbe d'équation $y^2 = 2px$ dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ est la parabole de foyer $F(\frac{p}{2}, 0)$ et de directrice associée $\mathcal{D} : x = -\frac{p}{2}$.
Démonstration : Etudions donc cette réciproque. Dans le repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, soit $\mathcal{P} = \{M(x, y),\ y^2 = 2px\}$. Soient $F \in X$ de coordonnées $(\frac{p}{2}, 0)$, $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x = -\frac{p}{2}$, et $\mathcal{P}'$ la parabole de foyer F et de directrice associée $\mathcal{D}$. D'après la démonstration de la proposition 5.4, $\mathcal{P}'$ a pour équation réduite $y^2 = 2px$ dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. D'où $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$ et la conclusion voulue. □

Exercice 5.3 Montrer que dans un repère orthonormé, toute courbe d'équation $y = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ est une parabole.

Proposition 5.7 *L'axe focal est l'unique axe de réflexion laissant une parabole invariante.*

Démonstration : Soit $\mathcal{P}$, une parabole de foyer F, de directrice associée $\mathcal{D}$ et de paramètre p. Soit Δ' l'axe d'une réflexion laissant invariante la parabole $\mathcal{P}$. Dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ où O est le sommet de $\mathcal{P}$ et $\overrightarrow{\imath}$ de même direction que $\overrightarrow{OF}$, $\mathcal{P}$ et Δ' ont respectivement pour équation $y^2 = 2px$ et $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$. Pour tout point $M(x, y)$, dire que $M'(x', y')$ est l'image de M par $s_{\Delta'}$ revient à dire que $\overrightarrow{MM'}$ est normal à Δ' (c'est à dire $\overrightarrow{MM'}$ colinéaire à $\overrightarrow{n}(a, b)$ ou encore $b(x - x') = a(y - y')$) et que le milieu I de $[MM']$ appartient à Δ' (ce qui se traduit par $a\frac{x+x'}{2} + b\frac{y+y'}{2} + c = 0$). Finalement,

$$M' = s_{\Delta'}(M) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x' & = \dfrac{1}{a^2 + b^2}\Big((b^2 - a^2)x - 2aby - 2ac\Big) \\ y' & = \dfrac{1}{a^2 + b^2}\Big(-2abx + (a^2 - b^2)y - 2bc\Big) \end{array}\right.$$

Pour tout réel t, le point de coordonnées $(\frac{t^2}{2p}, t)$ est sur $\mathcal{P}$ et il en est donc de même de son image par $s_{\Delta'}$. Cela signifie que pour tout réel t on a

$$\left(\frac{1}{a^2 + b^2}\right)^2 \left(-2ab\frac{t^2}{2p} + (a^2 - b^2)t - 2bc\right)^2 = 2p.\frac{1}{a^2 + b^2}\left((b^2 - a^2)\frac{t^2}{2p} - 2abt - 2ac\right)$$

ou encore

$$\forall t \in \mathbb{R}, \left(-ab\frac{t^2}{p} + (a^2 - b^2)t - 2bc\right)^2 - 2p(a^2+b^2)\left((b^2-a^2)\frac{t^2}{2p} - 2abt - 2ac\right) = 0$$

La nullité de ce polynôme entraîne celle de ses coefficients donc en particulier $ab = 0$ (coefficient de t^4). Si $b = 0$ il reste $\forall t \in \mathbb{R},\ (a^2t)^2 - 2pa^2\left(-a^2\frac{t^2}{2p} - 2ac\right) = 0$ ce qui imposerait $a = 0$: cela contredit l'hypothèse $(a, b) \neq (0, 0)$. Par suite, $a = 0$ et $\forall t \in \mathbb{R},\ (-b^2t - 2bc)^2 - 2pb^2\left(b^2\frac{t^2}{2p}\right) = 0$ ce qui se simplifie, puisque $b \neq 0$, en $\forall t \in \mathbb{R},\ bct + c^2 = 0$. Par suite, $c = 0$ et Δ' a pour équation $y = 0 : \Delta' = \Delta$. □

Conséquences. Une parabole admet un unique sommet, un unique foyer et une unique directrice associée.

Démonstration : La proposition précédente montre qu'une parabole admet un unique axe focal donc un unique sommet (intersection de la parabole avec son axe focal). Si l'on suppose qu'une même parabole $\mathcal{P}$ a deux couples foyer-directrice, la démonstration de la proposition 5.4 montre que dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ où O est le sommet de $\mathcal{P}$ et $\overrightarrow{\imath}$ de même direction que $\overrightarrow{OF}$ (donc aussi colinéaire à $\overrightarrow{OF'}$ en vertu de l'unicité de l'axe focal), $\mathcal{P}$ a à la fois pour équation $y^2 = 2px = 4x_Fx$ et $y^2 = 2(x_{F'} - x_{K'})x + x_{K'}^2 - x_{F'}^2$. $\mathcal{P}$ passant par O, il vient $x_{K'} = -x_{F'}$ (car $F' \notin \mathcal{D}'$) puis $x_{F'} = x_F$: $F = F'$ et $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$. □

Représentation paramétrique et tangentes

Soit $(\mathcal{P})$ une parabole d'équation $y^2 = 2px$ dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$. Dans ce même repère, $\mathcal{P}$ admet pour représentation paramétrique $(\mathcal{P}) : \left\{\begin{array}{ll} x(t) & = \frac{t^2}{2p} \\ y(t) & = t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$

Le vecteur dérivé $(\frac{t}{p}, 1)$ n'étant jamais nul, on en déduit que la parabole admet en chacun de ses points une tangente. La tangente au point de paramètre t_0 est dirigée par le vecteur de coordonnées $(\frac{t_0}{p}, 1)$ donc admet pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{ll} x(u) & = \frac{t_0}{p}u + \frac{t_0^2}{2p} \\ y(u) & = u + t_0 \end{array}\right. \quad (u \in \mathbb{R}).$

En éliminant le paramètre u, on obtient finalement une équation cartésienne de cette tangente :

Proposition 5.8 *Soit $\mathcal{P}$ une parabole d'équation $y^2 = 2px$ dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$. Il y a une tangente en tout point $M_0(x_0, y_0)$ de $\mathcal{P}$: c'est la droite d'équation $yy_0 = p(x + x_0)$.*

Exercice 5.4 Montrer que les tangentes à une parabole $\mathcal{P}$ sont exactement les droites non parallèles à l'axe focal qui coupent $\mathcal{P}$ en un seul point.

Exercice 5.5 Montrer que la tangente à une parabole en un point M est la médiatrice du segment $[FH]$ (où H est le projeté orthogonal de M sur la directrice). Montrer également que si M n'est pas sur l'axe focal alors cette tangente est aussi la hauteur issue de M dans le triangle FMH ainsi que la bissectrice intérieure de l'angle en M.

5.1.4 L'ellipse

La proposition 5.4 montre qu'une ellipse $\mathcal{E}$ de foyer F, de directrice associée $\mathcal{D}$ et d'excentricité e admet pour équation réduite (dans un repère orthonormé bien choisi) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a > b > 0$ (prendre $a > 0$ et poser $b = a\sqrt{1 - e^2}$). Réciproquement,

Proposition 5.9 *La courbe plane d'équation* $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ *avec* $a>b>0$*, dans un repère orthonormé* $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$*, est l'ellipse de foyer* $F(c,0)$*, de directrice associée* $\mathcal{D}: x=\dfrac{a^2}{c}$ *et d'excentricité* $e=\dfrac{c}{a}$ *où* $c=\sqrt{a^2-b^2}$*. De plus,* $d=\frac{b^2}{c}$ *et* $p=\frac{b^2}{a}$*.*

Démonstration : Soit $\mathcal{E}=\left\{M(x,y)\in X, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right\}$ dans le repère orthonormal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Posons $c=\sqrt{a^2-b^2}$, $e=\frac{c}{a}$, $F(c,0)$ et $\mathcal{D}: x=\dfrac{a^2}{c}$. Considérons l'ellipse $\mathcal{E}'$ de foyer F de directrice asssociée $\mathcal{D}$ et d'excentricité e. D'après la démonstration de la proposition 5.4, $\mathcal{E}'$ a pour équation dans $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ $(1-e^2)x^2+y^2-2(x_F-e^2x_K)x=e^2x_K^2-x_F^2$. Comme $e^2x_K=\frac{c^2}{a^2}\frac{a^2}{c}=c=x_F$ et $a^2-c^2=b^2$, on a finalement $\mathcal{E}': \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ et $\mathcal{E}'=\mathcal{E}$.
Enfin, $d(F,\mathcal{D})=\frac{a^2}{c}-c=\frac{b^2}{c}$ et donc $p=ed=\frac{b^2}{a}$. □

Proposition et Définition 5.10 *Soit* $\mathcal{E}$ *une ellipse d'équation réduite* $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ *avec* $a>b>0$*, dans un repère orthonormé* $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$*. Si* $(O',\vec{\imath}',\vec{\jmath}')$ *est un repère orthonormé dans lequel* $\mathcal{E}$ *a une équation de la forme* $\dfrac{x^2}{a'^2}+\dfrac{y^2}{b'^2}=1$ *avec* $a'>b'>0$*, alors* $O'=O$*,* $a'=a$*,* $b'=b$*,* $\vec{\imath}'=\pm\vec{\imath}$ *et* $\vec{\jmath}'=\pm\vec{\jmath}$*.*

- a *est appelé le* demi-grand axe *de* $\mathcal{C}$ *;* b *est appelé le* demi-petit axe *de* $\mathcal{C}$ *;*
- (Ox) *est appelé le* grand axe *(ou l'axe focal) de* $\mathcal{C}$ *et est un axe de symétrie pour* $\mathcal{C}$ *;*
- (Oy) *est appelé le* petit axe *et est un axe de symétrie pour* $\mathcal{C}$ *;*

Démonstration : Il est déjà clair que nécessairement $O'=O$ (unicité du centre de symétrie). D'autre part, pour tout (x,y), $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\geq\frac{x^2+y^2}{a^2}$ donc $x^2+y^2\leq a^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$ et en particulier, $\forall M\in\mathcal{E}$, $OM^2\leq a^2$ avec égalité si et seulement si $M(\pm a,0)$. Par suite, $a=\operatorname*{Sup}_{M\in\mathcal{E}} OM=a'$ et $\vec{\imath}'=\pm\vec{\imath}$.
On montre de même que $b=\operatorname*{Inf}_{M\in\mathcal{E}} OM=b'$ et $\vec{\jmath}'=\pm\vec{\jmath}$. □

Conséquences. Une ellipse $\mathcal{E}$ admet exactement deux couples foyer-directrice : si $(F,\mathcal{D})$ est l'un d'eux, l'autre est $(F',\mathcal{D}')$ où F' et $\mathcal{D}'$ sont les symétriques de F et $\mathcal{D}$ par rapport au centre de $\mathcal{E}$. Dans les deux cas, l'excentricité est la même. Une ellipse admet également un unique paramètre.

Représentations paramétriques et tangentes

Soit $(\mathcal{E})$ une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ avec $a>b>0$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Dans ce même repère, $\mathcal{E}$ admet pour représentation paramétrique $(\mathcal{E}): \begin{cases} x(t) &= a\cos t\\ y(t) &= b\sin t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

Démonstration : Notons $\mathcal{E}'=\{M(x,y)\in X,\ \exists t\in\mathbb{R}, x=a\cos t, y=b\sin t\}$.
• Soit $M\in\mathcal{E}', \exists t\in\mathbb{R}, M(a\cos t, b\sin t): \frac{(a\cos t)^2}{a^2}+\frac{(b\sin t)^2}{b^2}=1$ donc $M\in\mathcal{E}, \mathcal{E}'\subset\mathcal{E}$
• Soit $M(x,y)\in\mathcal{E}$, on a $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$. Ainsi $\frac{x}{a}\in[-1,+1]$ et donc $\exists t\in\mathbb{R}$, $\frac{x}{a}=\cos t$. Par suite, $\frac{y^2}{b^2}=1-\cos^2 t=\sin^2 t$. Quitte à changer t en $-t$, on a alors $x=a\cos t$ et $y=b\sin t$ d'où $M\in\mathcal{E}'$ et finalement $\mathcal{E}\subset\mathcal{E}'$. □

Exercice 5.6 Donner une représentation paramétrique rationnelle de l'ellipse précédente privée de son sommet $A'(-a,0)$.

Le vecteur dérivé $(-a\sin t, b\cos t)$ n'étant jamais nul, on en déduit que l'ellipse admet en chacun de ses points une tangente. La tangente $\mathcal{T}_{M_0}$ au point de paramètre t_0 est dirigée par le vecteur de coordonnées $(-a\sin(t_0), b\cos(t_0))$. Un point $M(x,y)$ est sur $\mathcal{T}_{M_0}$ si et seulement si $\overrightarrow{M_0M}$ est colinéaire à ce vecteur et donc $M(x,y)\in\mathcal{T}_{M_0} \iff \begin{vmatrix} x-a\cos t_0 & -a\sin t_0 \\ y-b\sin t_0 & b\cos t_0 \end{vmatrix} = 0$ d'où $M(x,y)\in\mathcal{T}_{M_0} \iff bx\cos t_0 + ay\sin t_0 = ab$ soit $M(x,y)\in\mathcal{T}_{M_0} \iff b\frac{xx_0}{a} + a\frac{yy_0}{b} = ab$.

Proposition 5.11 *Soit $\mathcal{E}$ une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ dans un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$. Il y a une tangente en tout point $M_0(x_0,y_0)$ de $\mathcal{E}$: c'est la droite d'équation $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$.*

Exercice 5.7 Montrer que la tangente à une ellipse en un point M est la bissectrice extérieure de l'angle en M dans le triangle MFF'.

5.1.5 L'hyperbole

D'après la proposition 5.4, une hyperbole $\mathcal{H}$ de foyer F, de directrice associée $\mathcal{D}$ et d'excentricité e admet pour équation réduite (dans un repère orthonormé bien choisi) : $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ avec $a,b>0$ (prendre $a>0$ et poser $b=a\sqrt{e^2-1}$). Réciproquement,

Proposition 5.12 *La courbe plane d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ avec $a,b>0$, dans un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$, est l'hyperbole de foyer $F(c,0)$, de directrice associée $\mathcal{D}$: $x=\dfrac{a^2}{c}$ et d'excentricité $e=\dfrac{c}{a}$ où $c=\sqrt{a^2+b^2}$. De plus $d=\frac{b^2}{c}$ et $p=\frac{b^2}{a}$.*

Démonstration : Soit $\mathcal{H}=\{M(x,y)\in X,\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\}$ dans le repère orthonormé $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$. Posons $c=\sqrt{a^2+b^2}$, $e=\frac{c}{a}$, $F(c,0)$ et $\mathcal{D}: x=\dfrac{a^2}{c}$. Soit $\mathcal{H}'$ l'hyperbole de foyer F, de directrice associée $\mathcal{D}$ et d'excentricité e. D'après la démonstration de la proposition 5.4, $\mathcal{H}'$ a pour équation dans $(O,\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$ $(1-e^2)x^2+y^2-2(x_F-e^2x_K)x=e^2x_K^2-x_F^2$. Comme $e^2x_K=\frac{c^2}{a^2}\frac{a^2}{c}=c=x_F$ et $a^2-c^2=-b^2$, on a finalement $\mathcal{H}'$: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ et $\mathcal{H}'=\mathcal{H}$.
De même que pour l'ellipse, on a $d=\frac{b^2}{c}$ et $p=\frac{b^2}{a}$. □

Proposition et Définition 5.13 *Soit l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation réduite $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ avec $a,b>0$, dans un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$. Si $(O',\overrightarrow{\imath}',\overrightarrow{\jmath}')$ est un repère orthonormé dans lequel $\mathcal{H}$ a une équation de la forme $\dfrac{x^2}{a'^2}-\dfrac{y^2}{b'^2}=1$ avec $a',b'>0$, alors $O'=O$, $a'=a$, $b'=b$, $\overrightarrow{\imath}'=\pm\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{\jmath}'=\pm\overrightarrow{\jmath}$.*

- *a est appelé le demi-axe transverse ; b est le demi-axe non transverse ;*
- *(Ox) est l'axe transverse (ou encore l'axe focal) et est un axe de symétrie ;*
- *(Oy) est l'axe non tranverse et est un axe de symétrie.*

Démonstration : Il est déjà clair que nécessairement $O'=O$ (unicité du centre de symétrie). D'autre part, pour tout $M(x,y)\in\mathcal{H}$, on a $x^2=a^2(1+\frac{y^2}{b^2})$ donc $x^2+y^2\geq a^2+y^2(1+\frac{a^2}{b^2})\geq a^2$ avec égalité si et seulement si $M(\pm a,0)$. Par suite, $a=\operatorname*{Inf}_{M\in\mathcal{H}} OM^2=a'$ et $\overrightarrow{\imath}'=\pm\overrightarrow{\imath}$. On en déduit alors $\overrightarrow{\jmath}'=\pm\overrightarrow{\jmath}$. Enfin, le point P de coordonnées $(a\sqrt{2},b)$ (dans le premier repère) est sur $\mathcal{H}$ donc $1+\frac{b^2}{b'^2}=2$ et finalement $b'=b$. □

Conséquences. Une hyperbole $\mathcal{H}$ admet exactement deux couples foyer-directrice : si $(F, \mathcal{D})$ est l'un d'eux, l'autre est $(F', \mathcal{D}')$ où F' et $\mathcal{D}'$ sont les symétriques de F et $\mathcal{D}$ par rapport au centre de $\mathcal{H}$. Dans les deux cas, l'excentricité est la même. Une hyperbole admet également un unique paramètre.

Représentations paramétriques et tangentes

Soit $(\mathcal{H})$ une hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a, b > 0$ dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$. Dans ce même repère, $\mathcal{H}$ admet pour représentation paramétrique

$$(\mathcal{H}) : \begin{cases} x(t) &= \dfrac{a}{\cos t} \\ y(t) &= b \tan t \end{cases} \quad (t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[)$$

Démonstration : Notons $\mathcal{H}' = \left\{ M(x, y) \in X, \exists t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[, \, x = \dfrac{a}{\cos t}, y = b \tan t \right\}$

- Soit $M \in \mathcal{H}', \exists t \in \mathbb{R}, M(\dfrac{a}{\cos t}, b \tan t) : \frac{a^2}{a^2 \cos^2 t} - \frac{b^2 \tan^2 t}{b^2} = 1$ donc $M \in \mathcal{H}$ et $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$
- Soit $M(x, y) \in \mathcal{H}$, on a $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$. $\frac{y}{b} \in \mathbb{R}$ donc $\exists t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\frac{y}{b} = \tan t$. Par suite, $\frac{x^2}{a^2} = 1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$. Quitte à changer t en $\pi + t$, on a alors $x = \frac{a}{\cos t}$ et $y = b \tan t$ d'où $M \in \mathcal{H}'$ et finalement $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}'$.

Exercice 5.8 Donner une représentation paramétrique rationnelle de l'hyperbole. □

Le vecteur dérivé $(a\frac{\sin t}{\cos^2 t}, \frac{b}{\cos^2 t})$ n'étant jamais nul, on en déduit que l'hyperbole admet en chacun de ses points une tangente. La tangente $\mathcal{T}_{M_0}$ au point de paramètre t_0 est dirigée par le vecteur de coordonnées $(a\frac{\sin t_0}{\cos^2 t_0}, \frac{b}{\cos^2 t_0})$. Un point $M(x, y)$ est sur $\mathcal{T}_{M_0}$ si et seulement si $\overrightarrow{M_0 M}$ est colinéaire à ce vecteur et donc $M(x, y) \in \mathcal{T}_{M_0} \iff \begin{vmatrix} x - \frac{a}{\cos t_0} & a\frac{\sin t_0}{\cos^2 t_0} \\ y - b \tan t_0 & \frac{b}{\cos^2 t_0} \end{vmatrix} = 0$ d'où, en multipliant par $\frac{1}{\cos t_0}$, $M(x, y) \in \mathcal{T}_{M_0} \iff \frac{bx}{\cos t_0} - ay \tan t_0 = ab\left(\frac{1}{\cos^2 t_0} - \tan^2 t_0\right) = ab$ soit finalement $M(x, y) \in \mathcal{T}_{M_0} \iff b\frac{x x_0}{a} - a\frac{y y_0}{b} = ab$.

Proposition 5.14 *Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$. Il y a une tangente en tout point $M_0(x_0, y_0)$ de $\mathcal{H}$: c'est la droite d'équation $\frac{x x_0}{a^2} - \frac{y y_0}{b^2} = 1$.*

Exercice 5.9 Montrer que la tangente à une hyperbole en un point M est la bissectrice intérieure de l'angle en M dans le triangle MFF'.

Branches infinies de l'hyperbole

Proposition 5.15 *Une hyperbole d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a, b > 0$ (dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$) admet deux asymptotes d'équations $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$.*

Démonstration : Étudions, par exemple, la branche infinie correspondant à $t \to \frac{\pi}{2}$ (avec la représentation paramétrique précédente). On a $\frac{y}{x} = \frac{b}{a} \sin t \xrightarrow[t \to \frac{\pi}{2}]{} \frac{b}{a}$ et $y - \frac{b}{a}x = b\frac{\sin t - 1}{\cos t}$ soit $y - \frac{b}{a}x = b\frac{\cos x - 1}{\sin x}$ où $x = \frac{\pi}{2} - t$ et donc $y - \frac{b}{a}x \xrightarrow[t \to \frac{\pi}{2}]{} 0$. □

Définition 5.16 *Une hyperbole est dite équilatère si ses deux asymptotes sont perpendiculaires.*

Remarque. Une hyperbole d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a, b > 0$ (dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$) est équilatère si et seulement si $a = b$ c'est à dire $e = \sqrt{2}$.

Hyperbole rapportée à ses asymptotes

Proposition 5.17 *Dans un repère lié à ses deux asymptotes, une hyperbole à une équation de la forme $xy = Cte$.*

Démonstration : Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a, b > 0$ (dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$). Ses asymptotes ont pour équations $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$. Posons alors $\vec{\imath}' = \lambda(a\vec{\imath} + b\vec{\jmath})$ et $\vec{\jmath}' = \mu(a\vec{\imath} - b\vec{\jmath})$ où $\lambda\mu \neq 0$ (ce sont deux vecteurs directeurs quelconques des asymptotes). La matrice de passage de $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ à $(\vec{\imath}', \vec{\jmath}')$ est donc $\begin{pmatrix} \lambda a & \mu a \\ \lambda b & -\mu b \end{pmatrix}$. Si (x, y) et (x', y') désignent respectivement les anciennes et nouvelles coordonnées d'un même point M, on a alors $x = a(\lambda x' + \mu y')$ et $y = b(\lambda x' - \mu y')$ et par suite, $M \in \mathcal{H} \Leftrightarrow (\lambda x' + \mu y')^2 - (\lambda x' - \mu y')^2 = 1$ et $\mathcal{H}$ a donc pour équation $x'y' = \frac{1}{4\lambda\mu}$. □

5.2 Définition bifocale des coniques à centre

Théorème 5.18 *Soient F et F' deux points de X, tels que $FF' = 2c > 0$ et a un réel strictement positif. Le lieu des points M du plan tels que $MF + MF' = 2a$ est*

- *$\emptyset$ si $a < c$ et $[FF']$ si $a = c$*
- *l'ellipse de demi-grand axe a et de foyers F et F' si $a > c$.*

Démonstration : Les deux premiers cas résultent de l'inégalité triangulaire (et du cas d'égalité dans cette inégalité). Supposons donc $a > c$. Soit O le milieu de $[FF']$. Posons $\vec{\imath} = \frac{1}{OF}\overrightarrow{OF}$ et $\vec{\jmath}$ tel que $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ soit une base orthonormée directe. Soit $M(x, y) \in X$. Désignons par Γ le lieu cherché et posons enfin $b^2 = a^2 - c^2$.

$$\begin{aligned}
M \in \Gamma &\iff MF + MF' = 2a \\
&\iff \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \\
&\iff (x-c)^2 + 2y^2 + (x+c)^2 + 2\sqrt{(x-c)^2+y^2}\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 4a^2 \\
&\iff -\left(x^2 + c^2 + y^2 - 2a^2\right) = \sqrt{(x-c)^2+y^2}\sqrt{(x+c)^2+y^2} \\
&\iff \begin{cases} \left(x^2 + c^2 + y^2 - 2a^2\right)^2 = \left[(x-c)^2 + y^2\right]\left[(x+c)^2 + y^2\right] \\ x^2 + y^2 \leq 2a^2 - c^2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} (x^2 + c^2 + y^2 - 2a^2)^2 = \left(x^2 + y^2 + c^2 - 2xc\right)\left(x^2 + y^2 + c^2 + 2xc\right) \\ x^2 + y^2 \leq 2a^2 - c^2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} (x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2 + c^2) + 4a^4 = (x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4x^2c^2 \\ x^2 + y^2 \leq 2a^2 - c^2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^2(c^2 - a^2) - y^2a^2 = a^2\left(c^2 - a^2\right) \\ x^2 + y^2 \leq 2a^2 - c^2 \end{cases} \\
&\iff \tfrac{x^2}{a^2} + \tfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 \leq a^2 + b^2 \\
&\iff \tfrac{x^2}{a^2} + \tfrac{y^2}{b^2} = 1 \text{ car } \left(\tfrac{x^2}{a^2} + \tfrac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow x^2 \leq a^2 \text{ et } y^2 \leq b^2\right)
\end{aligned}$$

Donc Γ est bien l'ellipse de demi-grand axe a et de foyers $F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$ □

Remarque. On en déduit la construction "du jardinier" de l'ellipse ...

Théorème 5.19 *Soient F et F' deux points de X, tels que $FF' = 2c > 0$ et a un réel strictement positif. Le lieu des points M du plan tels que $|MF - MF'| = 2a$ est*

- *$\emptyset$ si $a > c$ et $(FF') \backslash]FF'[$ si $a = c$*

- *l'hyperbole de demi-axe transverse a et de foyers F et F' si $a < c$.*

Démonstration : Les deux premiers cas résultent de l'inégalité triangulaire (et du cas d'égalité dans cette inégalité). Supposons donc $a < c$. Soit O le milieu de $[FF']$. Posons $\vec{\imath} = \frac{1}{OF}\overrightarrow{OF}$ et $\vec{\jmath}$ tel que $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ soit une base orthonormée directe. Soit $M(x, y) \in X$. Désignons par Γ le lieu cherché et posons enfin $b^2 = c^2 - a^2$.

$$\begin{aligned}
M \in \Gamma &\iff |MF - MF'| = 2a \\
&\iff \left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = 4a^2 \\
&\iff x^2 + c^2 + y^2 - 2a^2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\
&\iff \begin{cases} \left(x^2 + c^2 + y^2 - 2a^2\right)^2 = \left[(x-c)^2 + y^2\right]\left[(x+c)^2 + y^2\right] \\ x^2 + y^2 \geq 2a^2 - c^2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^2(c^2 - a^2) - y^2a^2 = a^2\left(c^2 - a^2\right) \\ x^2 + y^2 \geq 2a^2 - c^2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} b^2x^2 - y^2a^2 = a^2b^2 \\ x^2 + y^2 \geq 2a^2 - c^2 \end{cases} \\
&\iff \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 \geq a^2 - b^2 \\
&\iff \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ car } \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow x^2 \geq a^2\right)
\end{aligned}$$

Donc Γ est bien l'hyperbole de demi-axe transverse a et de foyers $F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$ □

5.3 Courbes du second degré

Dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on appelle courbe du second degré toute courbe plane Γ d'équation $f(x, y) = 0$ où f est un polynôme de degré deux en les variables x et y : $f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ avec A, B et C non tous nuls.

5.3.1 Recherche d'un centre de symétrie

Proposition 5.20 *Le point Ω de coordonnées (x_0, y_0) est centre de symétrie de la courbe Γ (supposée non vide) si et seulement si*

$$\begin{cases} 2Ax_0 + By_0 + D = 0 \\ Bx_0 + 2Cy_0 + E = 0 \end{cases} \quad \textit{c'est à dire si et seulement si} \quad \begin{cases} f'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

En particulier, si $4AC - B^2 \neq 0$, il y a un unique centre de symétrie.

Démonstration : Il est facile de vérifier que l'origine O du repère est centre de symétrie si et seulement si $E = D = 0$. Considérons le point Ω de coordonnées (x_0, y_0) et effectuons le changement d'origine correspondant. Notons (x, y) les coordonnées d'un point M dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$, et (X, Y) ses coordonnées dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$. On a alors $x = x_0 + X$ et $y = y_0 + Y$.

$$\begin{aligned}
M \in \Gamma &\Leftrightarrow Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\
&\Leftrightarrow A(X + x_0)^2 + B(X + x_0)(Y + y_0) + C(Y + y_0)^2 + D(X + x_0) + E(Y + y_0) + F = 0 \\
&\Leftrightarrow AX^2 + BXY + CY^2 + D'X + E'Y + F' = 0 \\
&\quad \text{où } D' = 2Ax_0 + By_0 + D, \quad E' = Bx_0 + 2Cy_0 + E \quad \text{et} \quad F' = f(x_0, y_0)
\end{aligned}$$

on traduit alors le fait que l'origine du nouveau repère est centre de symétrie. □

Remarque. Le signe de $4AC - B^2$ est celui du discriminant de la forme quadratique définie par $q(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$. Il est donc invariant dans un changement de base orthonormée. Le calcul précédent permet d'en déduire qu'il est invariant dans tout changement de repère orthonormé. D'une manière plus générale, le signe (strict) de ce discriminant est invariant dans tout changement de repère (cela résulte de la formule de changement de base $A' = {}^tPAP$ pour une forme quadratique).

5.3.2 Classification des courbes du second degré

Proposition 5.21 *La courbe d'équation* $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ *est*

- *si* $4AC - B^2 > 0$ *: une courbe du genre ellipse à savoir l'ensemble vide, un point, un cercle ou une ellipse.*
- *si* $4AC - B^2 < 0$ *: une courbe du genre hyperbole à savoir deux droites sécantes ou une hyperbole.*
- *si* $4AC - B^2 = 0$ *: une courbe du genre parabole à savoir l'ensemble vide, deux droites parallèles ou confondues ou une parabole.*

Démonstration :

- si $4AC - B^2 > 0$: Dans le repère d'origine Ω, l'équation de la courbe est de la forme $Ax^2+Bxy+Cy^2+K = 0$. On reduit alors la forme quadratique q dans le groupe orthogonal ; on détermine ainsi un repère orthonormé du plan dans lequel la courbe a une équation du type $A_1x'^2 + B_1y'^2 = K_1$ (c'est à dire que l'on effectue en fait une rotation du repère). Le signe du discriminant étant un invariant, A_1 et B_1 sont ici de même signe (par exemple positifs). Trois résultats sont alors possibles suivant que $K_1 < 0$, $K_1 = 0$ ou $K_1 > 0$.
- On procède de même dans le cas $4AC - B^2 < 0$ et on trouve un repère orthonormé du plan dans lequel la courbe a une équation du type $A_1x'^2+B_1y'^2 = K_1$. Le signe du discriminant étant un invariant, A_1 et B_1 sont ici de signes contraires. Deux résultats sont alors possibles suivant que $K_1 = 0$ ou $K_1 \neq 0$.
- Si $4AC - B^2 = 0$, deux cas sont possibles :
  ou bien $A = 0$ et alors $B = 0$ (et donc $C \neq 0$). L'équation de Γ se réduit alors à $Dx = -Cy^2 - Ey - F$. Si $D \neq 0$, Γ est une parabole. Si $D = 0$, Γ est ou vide (si $E^2 - 4CF < 0$) ou la réunion de deux droites parallèles, éventuellement confondues (si $E^2 - 4CF \geq 0$).
  ou bien $A \neq 0$ et une équation de Γ est alors $A(x+\frac{B}{2A}y)^2+Dx+Ey+F = 0$. Le changement de coordonnées $y' = y$ et $x' = x + \frac{B}{2A}y$ (qui correspond à un changement de base) fournit une nouvelle équation de Γ : $y'(E - \frac{BD}{2A}) = -Ax'^2 - Dx' - F$ et par suite Γ est encore une parabole ou l'ensemble vide ou la réunion de deux droites parallèles, éventuellement confondues.

$\square$

Remarque. On pourrait songer à utiliser une réduction de Gauss de la forme quadratique. Mais cela conduit à se placer dans un repère non orthogonal où il est bien difficile de reconnaître la conique (et où on perd les propriétés métriques).

5.3.3 Exemple

Le plan étant rapporté à un repère orthonormal, déterminons la nature de la courbe d'équation $f(x, y) = 0$ avec $f(x, y) = 10x^2 - 6xy + 2y^2 - 3x + 2y$.

Le discriminant de la forme quadratique associée vaut, dans la base initiale, $44 > 0$. On a donc une courbe du type ellipse. Le centre de symétrie a des coordonnées (x_0, y_0) vérifiant $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$ c'est à dire $20x_0 - 6y_0 - 3 = 0$ et $-6x_0 + 4y_0 + 2 = 0$. On trouve $\omega(0, -\frac{1}{2})$ et la courbe a pour équation dans le nouveau repère $10X^2 - 6XY + 2Y^2 - \frac{1}{2} = 0$. On procède alors à la réduction orthonormale de la forme quadratique $q(X, Y) = 10X^2 - 6XY + 2Y^2$ de matrice $M = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres sont 1 et 11 d'où les vecteurs propres v_1 et v_2 de coordonnées respectives $\frac{1}{\sqrt{10}}(1, 3)$ et $\frac{1}{\sqrt{10}}(-3, 1)$. Dans le repère orthonormal (ω, v_1, v_2), la conique a pour équation $X'^2 + 11Y'^2 - \frac{1}{2} = 0$. C'est une ellipse.