Chapitre 3

Les angles

3.1 Angles orientés de vecteurs du plan

3.1.1 Groupe des rotations

Dans tout ce qui suit, on se place dans un espace vectoriel euclidien E de dimension 2.

Définition 3.1 *On appelle rotation de E toute composée de deux réflexions de E. On notera $\mathcal{R}$ l'ensemble des rotations de E.*

Proposition 3.2 *Toute rotation de E distincte de l'identité ne fixe aucun autre vecteur que 0.*

Démonstration : Soient donc $r \in \mathcal{R}$ et $u \in E\backslash\{0\}$ tel que $r(u) = u$. Par définition, on peut écrire r comme composée de deux réflexions : $r = s_1 \circ s_2$. Mais alors, $s_1 \circ r = s_2$ et donc $s_2(u) = s_1(r(u)) = s_1(u)$. En posant v ce dernier vecteur, on a $\|u\| = \|v\|$ (une réflexion est une isométrie). Ou bien $v = u$ et alors s_1 et s_2 ont même axe donc $s_1 = s_2$ et $r = id_E$ ou bien $u \neq v$ et l'unicité de la réflexion envoyant u sur v assure que $s_1 = s_2$ et donc $r = id_E$. □

Proposition 3.3 *Soient $u, v \in E\backslash\{0\}$. Si $\|u\| = \|v\|$ alors il existe une unique rotation envoyant u sur v.*

Démonstration : Montrons l'existence. Si $u = v$, l'identité convient. Sinon, soit s_1 l'unique réflexion envoyant u sur v. On a $s_1 \circ s_{\mathrm{Vect}(u)}(u) = v$ donc la rotation $r = s_1 \circ s_{\mathrm{Vect}(u)}$ convient.
Montrons l'unicité. Soit r' une rotation telle que $r'(u) = v$. Si $u = v$, la proposition précédente donne $r' = id_E = r$. Supposons donc $u \neq v$ et posons $g = s_1 \circ r'$ où s_1 est l'unique réflexion envoyant u sur v. g est une isométrie qui fixe u. Soit alors e un vecteur orthogonal à u tel que $\|e\| = \|u\|$. (u, e) est une base orthonogonale de E et $g(u) = u \perp g(e)$ donc $g(e) = \pm e$. $g(e) = e$ est impossible (car sinon $g = id_E$ et $r' = s_1$ ce qui est exclu, une rotation et une réflexion n'ayant pas même ensemble d'invariants). On a donc $g(e) = -e$ et par suite $g = s_{\mathrm{Vect}(u)}$ soit $r' = s_1 \circ s_{\mathrm{Vect}(u)} = r$. □

Proposition 3.4 *Soit r une rotation de E. Pour toute réflexion s de E, il existe une réflexion s_1 de E telle que $r = s_1 \circ s$. De même, il existe une réflexion s_2 telle que $r = s \circ s_2$.*

Démonstration : C'est clair si $r = id$ (prendre $s_1 = s_2 = s$). Sinon, soient d l'axe de s, a un élément non nul de d et $b = r(a)$ (on a donc $b \neq a$). Il existe alors une réflexion s_1 telle que $s_1(a) = b$. Considérons $r' = s_1 \circ s$. C'est une rotation qui transforme a en b. Or il existe exactement une rotation de $\mathcal{R}$ transformant a en b (car $\|a\| = \|b\|$), et donc $r = r' = s_1 \circ s$.

Ce qui vient d'être démontré vaut pour r^{-1}. Il existe donc une réflexion s_2 telle que $r^{-1} = s_2 \circ s$ ce qui implique $r = s \circ s_2$. □

Théorème 3.5 *L'ensemble $\mathcal{R}$ des rotations de E est un sous-groupe commutatif de $\mathcal{O}(E)$.*

Démonstration : $\mathcal{R}$ contient Id_E. Si $r = s_1 \circ s_2$ est une rotation, r est inversible et son inverse est $r^{-1} = s_2 \circ s_1$ qui est bien une rotation. La seule chose non évidente est que $\mathcal{R}$ soit stable par composition. Soient donc r et r' deux rotations. Soit s une réflexion. D'après ce qui précède, il existe deux réflexions s_1 et s_2 telles que $r = s_1 \circ s$ et $r' = s \circ s_2$ et donc $r \circ r' = s_1 \circ s \circ s \circ s_2 = s_1 \circ s_2$ car $s \circ s = Id$. Donc $r \circ r'$ est bien une rotation.
Soient enfin r_1 et r_2 deux rotations de $\mathcal{R}$. Il existe des réflexions s, s_1 et s_2 de E telles que $r_1 = s_1 \circ s$ et $r_2 = s \circ s_2$ de sorte que $r_1 \circ r_2 = s_1 \circ s_2$ tandis que $r_2 \circ r_1 = s \circ s_2 \circ s_1 \circ s$.
Il s'agit donc de montrer que $s_1 \circ s_2 = s \circ s_2 \circ s_1 \circ s$ ou encore : $s \circ s_1 \circ s_2 = s \circ s_2 \circ s_1$.
Considérons $t = s \circ s_1 \circ s_2$. En décomposant la rotation $s_1 \circ s_2$ sous la forme $s_1 \circ s_2 = s \circ s_3$, on voit que $t = s_3$ est une réflexion donc une involution. Or $t^{-1} = (s \circ s_1 \circ s_2)^{-1} = s_2 \circ s_1 \circ s$ ce qui démontre le résultat. □

Exercice 3.1 Redémontrer ce résulat à partir des expressions matricielles.

3.1.2 Notion d'angle

Proposition et Définition 3.6 *Soit C l'ensemble des vecteurs de E de norme 1. La relation $\sim$ définie sur $C \times C$ par $(u, v) \sim (u', v')$ s'il existe une rotation r telle que $r(u) = u'$ et $r(v) = v'$, est une relation d'équivalence. L'ensemble quotient de $C \times C$ par cette relation est appelé ensemble des angles orientés de vecteurs et noté $\mathcal{A}$: $\mathcal{A} = (C \times C)/\!\sim\, = (C \times C)/\mathcal{R}$.*
L'angle orienté $(\widehat{u, v})$ est par définition l'image de (u, v) dans $\mathcal{A}$.
Extension de la définition : si x et y sont deux vecteurs **non nuls** *de E, $\frac{x}{\|x\|}$ et $\frac{y}{\|y\|}$ sont des vecteurs de norme 1, ce qui permet de définir $(\widehat{x, y}) = (\widehat{\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}})$.*

Démonstration : Le fait que $\sim$ soit une relation d'équivalence peut se vérifier directement. Il est aussi possible de remarquer que le groupe R opère naturellement sur C et donc sur $C \times C$ et que $\sim$ est la relation d'équivalence associée à cette opération de R. □

Exemples. Soit u un vecteur non nul de E. L'angle $(\widehat{u, u})$ est appelé *angle nul.* L'angle $(\widehat{u, -u})$ est appelé *angle plat.*

Propriétés. Les rotations et les homothéties conservent les angles orientés de vecteurs.
Démonstration : **Cas des rotations.** Soient x et y deux vecteurs non nuls et r une rotation. Si x et y sont de norme 1, il en est de même de $r(x)$ et de $r(y)$, et l'assertion résulte de la définition de $\mathcal{A}$. Dans le cas général, notons $a = \|x\|$ et $b = \|y\|$. Comme r est une isométrie, $\|r(x)\| = \|x\| = a$ et $\|r(y)\| = \|y\| = b$. En utilisant la définition précédente,

$$(\widehat{r(x), r(y)}) = (\widehat{\frac{r(x)}{\|r(x)\|}, \frac{r(y)}{\|r(y)\|}})$$

Comme r est linéaire, $\frac{r(x)}{\|r(x)\|} = \frac{r(x)}{a} = r(\frac{x}{a})$ et $\frac{r(y)}{\|r(y)\|} = r(\frac{y}{b})$ donc $(\widehat{r(x), r(y)}) = (\widehat{r(\frac{x}{a}), r(\frac{y}{b})})$.
Comme $\frac{x}{a}$ et $\frac{y}{b}$ sont unitaires, $(\widehat{r(\frac{x}{a}), r(\frac{y}{b})}) = (\widehat{\frac{x}{a}, \frac{y}{b}}) = (\widehat{x, y})$ en appliquant l'extension de la définition.

Cas des homothéties. Soit donc h une homothétie de rapport λ non nul.
Si λ est strictement positif, $\|\lambda\, x\| = \lambda\, \|x\|$ et $\|\lambda y\| = \lambda\, \|y\|$

$$\text{donc} \quad (\widehat{\lambda\, x, \lambda\, y}) = (\widehat{\frac{\lambda\, x}{\|\lambda\, x\|}, \frac{\lambda\, y}{\|\lambda\, y\|}}) = (\widehat{\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}}) = (\widehat{x, y})$$

Si λ est strictement négatif, par un calcul analogue, $(\widehat{\lambda\, x, \lambda\, y}) = (\widehat{-x, -y})$.
Comme E est de dimension 2, $-Id$ est une rotation (c'est par exemple, pour tout vecteur

non nul e, la composée $s_{\mathrm{Vect}(e)} \circ s_{(\mathrm{Vect}(e))^\perp}$) et donc, d'après ce qui précède, $(\widehat{-x, -y}) = (\widehat{x, y})$ □

3.1.3 Angle d'une rotation

Proposition et Définition 3.7 *Soit e un vecteur unitaire.*
L'application $\theta_e : R \to \mathcal{A}$, $r \mapsto \theta_e(r) = (\widehat{e, r(e)})$ est indépendante du choix du vecteur unitaire e. Pour toute rotation r, $\theta(r)$ est par définition, l'angle de la rotation r.

Démonstration : On doit vérifier que si e' est un autre élément de C alors $(\widehat{e, r(e)}) = (\widehat{e', r(e')})$ ce qui revient à dire que $(e, r(e)) \sim (e', r(e'))$. Or il existe une rotation r' telle que $r'(e) = e'$. Il s'agit donc de montrer que $r'(r(e)) = r(e')$ soit encore : $r'(r(e)) = r(r'(e))$; mais le groupe R est commutatif, et donc $r \circ r' = r' \circ r$. Ce qui démontre le résultat. □

3.1.4 Groupe des angles orientés

Proposition 3.8 *L'application θ (définie au paragraphe précédent) est bijective. Une rotation est donc caractérisée par son angle.*

Démonstration :

1) Montrons que θ est injective : soient donc r et r' deux rotations telles que $\theta(r) = \theta(r')$. Donc $(\widehat{e, r(e)}) = (\widehat{e, r'(e)})$. Cela signifie qu'il existe une rotation r'' telle que $r''(e) = e$ et $r''(r(e)) = r'(e)$. Or l'égalité $r''(e) = e$ implique que $r'' = Id$, et la deuxième égalité se réduit donc à : $r(e) = r'(e)$, ce qui implique $r = r'$.

2) Montrons que θ est surjective : soit donc $a = (\widehat{u, v})$ un angle. Comme $\theta = \theta_u$, il suffit donc de montrer qu'il existe r dans R telle que $a = \theta_u(r)$ ou encore que $v = r(u)$. Mais ceci résulte de la proposition 3.3. □

Conséquence. $\mathcal{A}$ peut être muni d'une loi de composition lui conférant une structure de groupe abélien en posant, pour a et a' dans $\mathcal{A}$, $a + a' = \theta\ (\theta^{-1}(a) \circ \theta^{-1}(a'))$ (transport de structure).

Exercice 3.2 Vérifier que la loi + fait bien de $\mathcal{A}$ un groupe qui de plus est abélien.

Remarque. Par construction, l'application θ est alors un isomorphisme de groupes.

Proposition 3.9 (Relation de Chasles) *Pour tous vecteurs non nuls u, v et w, on a :*

$$(\widehat{u, v}) + (\widehat{v, w}) = (\widehat{u, w})$$

Démonstration : Soit r la rotation telle que $r(u) = v$ et r' la rotation telle que $r'(v) = w$. Donc $\theta(r) = (\widehat{u, v})$ et $\theta(r') = (\widehat{v, w})$. Il résulte de la définition de l'addition des angles que $(\widehat{u, v}) + (\widehat{v, w}) = \theta(r \circ r')$ et donc $(\widehat{u, v}) + (\widehat{v, w}) = \theta(r' \circ r)$. Or $r' \circ r(u) = w$ et donc $\theta(r' \circ r) = (\widehat{u, w})$. Ce qui démontre la propriété. □

Remarque. La définition de l'addition des angles correspond donc bien à ce que l'on attend géométriquement à savoir qu'ajouter deux angles correspond bien à "*les mettre bout à bout*".

Exercice 3.3 Montrer que toute réflexion inverse les angles. Autrement dit, pour tous vecteurs non nuls u et v, et pour toute réflexion s, $(\widehat{s(u), s(v)}) = -(\widehat{u, v})$.

3.1.5 Mesure d'un angle orienté

On choisit une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de E, et à tout réel x on associe le vecteur (unitaire) $u(x) = (\cos x)\, e_1 + (\sin x)\, e_2$. Notons alors $a_{\mathcal{B}}(x) = (\widehat{e_1, u(x)})$.

Proposition 3.10 *L'application $a_{\mathcal{B}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{A}$ est un homomorphisme de groupes, surjectif, de noyau $2\pi\mathbb{Z}$ et on a donc un isomorphisme de groupes $\mathcal{A} \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.*

Démonstration : Montrons que $a_{\mathcal{B}}$ est une surjection : si α est un angle, il existe une rotation r de R telle que $\alpha = (\widehat{e_1, r(e_1)})$ (surjectivité de θ_{e_1}) et $r(e_1)$ est bien de la forme $u(x)$ puisqu'en dimension 2, un endomorphisme orthogonal positif (rotation) a, dans une base orthonormée, une matrice de la forme $R(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$.
Montrons que $a_{\mathcal{B}}$ est un homomorphisme de groupes. Soient x et x' deux réels. On va montrer que $a_{\mathcal{B}}(x + x') = a_{\mathcal{B}}(x) + a_{\mathcal{B}}(x')$, soit encore : $(\widehat{e_1, u(x + x')}) = (\widehat{e_1, u(x)}) + (\widehat{e_1, u(x')})$.
Soit donc r la rotation telle que $r(e_1) = u(x)$ et r' la rotation telle que $r'(e_1) = u(x')$.
Il suffit donc de montrer que $r \circ r'(e_1) = u(x + x')$. Or $r'(e_1) = \cos x'\, e_1 + \sin x'\, e_2$. Comme r est *linéaire*, $r \circ r'(e_1) = \cos x'\, r(e_1) + \sin x'\, r(e_2)$; d'autre part, par définition, $r(e_1) = u(x) = \cos x\, e_1 + \sin x\, e_2$ et comme r est de déterminant $+1$, $r(e_2) = -\sin x\, e_1 + \cos x\, e_2$ et donc,

$$r \circ r'(e_1) = \cos x' \,(\cos x\, e_1 + \sin x\, e_2) + \sin x' \,(-\sin x\, e_1 + \cos x\, e_2)$$

Les formules d'addition montrent que : $r \circ r'(e_1) = \cos(x + x')\, e_1 + \sin(x + x')\, e_2$ et donc $r \circ r'(e_1) = u(x + x')$.
Le nombre réel x appartient au noyau de $a_{\mathcal{B}}$ si et seulement si $u(x) = e_1$ ce qui équivaut à $\cos x = 1$ et $\sin x = 0$, et ceci équivaut à : $x \in 2\pi\mathbb{Z}$.
Pour tout réel x notons $\overline{x}$ son image dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Comme $a_{\mathcal{B}}(x)$ ne dépend que de la classe de x modulo $2\pi\mathbb{Z}$, on peut définir une application $\overline{a_{\mathcal{B}}} : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathcal{A}$ en posant $\overline{a_{\mathcal{B}}}\,(\overline{x}) = a_{\mathcal{B}}(x)$, qui est également un homomorphisme. Comme $a_{\mathcal{B}}$ est surjectif, il en est de même de $\overline{a_{\mathcal{B}}}$. Enfin, si $\overline{x}$ appartient au noyau de $\overline{a_{\mathcal{B}}}$, x appartient à $2\pi\mathbb{Z}$ et donc $\overline{x} = 0$. □

Proposition 3.11 *Soient $\mathcal{B}'$ une autre base et $\overline{a_{\mathcal{B}'}}$ définie de manière analogue.*

- *Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont de même orientation alors les applications $\overline{a_{\mathcal{B}}}$ et $\overline{a_{\mathcal{B}'}}$ coïncident.*
- *Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont d'orientations contraires alors $\overline{a_{\mathcal{B}'}} = -\overline{a_{\mathcal{B}}}$.*

Démonstration : Notons, comme précédemment $u'(x) = \cos x\, e'_1 + \sin x\, e'_2$ et considérons l'isométrie (linéaire) $f : E \to E$ définie par $f(e_1) = e'_1$ et $f(e_2) = e'_2$. f est alors de déterminant $+1$, car $\det f = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$, et donc f est une rotation, et donc conserve les angles. Comme $f(u(x)) = u'(x)$ ceci implique $(\widehat{e'_1, u'(x)}) = (\widehat{f(e_1), f(u(x))}) = (\widehat{e_1, u(x)})$ et donc $\overline{a_{\mathcal{B}}}(x) = \overline{a_{\mathcal{B}'}}(x)$ d'où $\overline{a_{\mathcal{B}'}} = \overline{a_{\mathcal{B}}}$. Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont d'orientations contraires alors f est alors une réflexion et donc inverse les angles. D'où comme ci-dessus $\overline{a_{\mathcal{B}'}} = -\overline{a_{\mathcal{B}}}$. □

Définition 3.12 *Lorsque le plan vectoriel E est orienté, on appelle mesure d'un angle orienté de vecteurs α tout réel x tel que $a(x) = \alpha$. On appelle mesure principale de α l'unique réel $x \in]-\pi, \pi]$ tel que $a(x) = \alpha$.*

3.1.6 Cosinus et Sinus d'un angle orienté de vecteurs

Proposition et Définition 3.13 *On définit une application de $\mathcal{A}$ dans $[-1, 1]$ en associant à un angle orienté de vecteurs unitaires $(\widehat{u, v})$, le réel Cos$((\widehat{u, v})) = \langle u, v \rangle$ (appelé Cosinus de l'angle orienté de vecteurs $(\widehat{u, v})$).*

Démonstration : Si (u, v) et (u', v') sont deux couples de vecteurs unitaires tels que $\widehat{(u, v)} = \widehat{(u', v')}$ alors il existe un élément r de $\mathcal{O}^+(E)$ tel que $u' = r(u)$ et $v' = r(v)$ et donc $< u', v' > = < r(u), r(v) > = < u, v >$ car r conserve le produit scalaire. □

Remarques.

- La fonction Cosinus est intrinsèque (elle ne dépend pas du choix de l'orientation).
- Pour tout couple (u, v) de vecteurs non nuls, on a donc : $< u, v > = \|u\|.\|v\|.\mathrm{Cos}(\widehat{(u, v)})$.
- Avec les notations précédentes, pour tout réel x on a $\mathrm{Cos}(a(x)) = \cos x$.

Proposition et Définition 3.14 *Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée du plan. On définit une application de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$ en associant à un angle orienté de vecteurs unitaires $\widehat{(u, v)}$, le réel $Sin(\widehat{(u, v)}) = \det_{\mathcal{B}}(u, v)$ (appelé Sinus de l'angle orienté de vecteurs $\widehat{(u, v)}$ dans la base $\mathcal{B}$).*

Démonstration : Si (u, v) et (u', v') sont deux couples de vecteurs unitaires représentant l'angle $\widehat{(u, v)}$ alors il existe un élément r de $\mathcal{O}^+(E)$ tel que $u' = r(u)$ et $v' = r(v)$ et donc $\det_{\mathcal{B}}(u', v') = \det_{\mathcal{B}}(r(u), r(v)) = \det_{\mathcal{B}}(r)\det_{\mathcal{B}}(u, v)$ et le résultat en découle. □

Remarques.

- La fonction Sinus n'est pas intrinsèque : elle est inchangée si on remplace $\mathcal{B}$ par une base orthonormée de même orientation mais elle est changée en son opposée dans le cas contraire.
- Pour tout angle orienté α, on a : $\mathrm{Cos}^2(\alpha) + \mathrm{Sin}^2(\alpha) = 1$.
- Pour tout angle orienté α, on a donc : $\mathrm{Sin}(\alpha) \in [-1, 1]$.
- Avec les notations du paragraphe précédent, pour tout réel x on a $\mathrm{Sin}(a(x)) = \sin x$.

Sinus et produit vectoriel

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Étant donnés deux vecteurs u et v de E, le produit vectoriel $u \wedge v$ est caractérisé par :

- $u \wedge v = \overrightarrow{0}$ si u et v sont colinéaires,
- $u \wedge v = \|u\|.\|v\|.\sin\left(\widehat{(u, v)}\right)\overrightarrow{k}$ où $\overrightarrow{k}$ est le vecteur unitaire directement orthogonal à (u, v), ce vecteur déterminant l'orientation du plan $\mathrm{Vect}(\{u, v\})$, sinon.

Démonstration : Supposons donc (u, v) libre. Soit $\overrightarrow{k}$ le vecteur unitaire directement orthogonal à (u, v). Soit (e_1, e_2) une base orthonormée de $\mathrm{Vect}(\{u, v\})$ telle que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \overrightarrow{k})$ soit orthonormée directe. Soit $w \in E$. On a alors $< u \wedge v, w > = [u, v, w] = \begin{vmatrix} x & x' & \alpha \\ y & y' & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{vmatrix}_{\mathcal{B}}$ et donc $< u \wedge v, w > = \gamma \det_{(e_1, e_2)}(u, v)$ soit finalement $< u \wedge v, w > = \gamma \sin\left(\widehat{(u, v)}\right)\|u\|.\|v\|$. Le résultat en découle puisque $u \wedge v$ est colinéaire à $\overrightarrow{k}$. □

Remarque. Compte tenu du choix effectué pour $\overrightarrow{k}$, on a $\sin\left(\widehat{(u, v)}\right) > 0$ (prendre $w = \overrightarrow{k}$ dans la démonstration précédente pour s'en convaincre).

3.2 Autres notions d'angles

3.2.1 Angles géométriques de vecteurs du plan

Proposition et Définition 3.15 *Soit C l'ensemble des vecteurs de E de norme 1. La relation $\approx$ définie sur $C \times C$ par $(u, v) \sim (u', v')$ s'il existe un élément f de $\mathcal{O}(E)$ tel que $f(u) = u'$ et $f(v) = v'$, est une relation d'équivalence. L'ensemble quotient de $C \times C$ par cette relation est appelé ensemble des angles géométriques (ou non orientés) de vecteurs et noté A : $A = (C \times C)/\approx = (C \times C)/\mathcal{O}(E)$.*
L'angle non orienté $\widehat{\{u, v\}}$ est par définition l'image de (u, v) dans A.
Extension de la définition : si x et y sont deux vecteurs **non nuls** *de E, $\frac{x}{\|x\|}$ et $\frac{y}{\|y\|}$ sont des vecteurs de norme 1, ce qui permet de définir $\widehat{\{x, y\}} = \widehat{\{\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\}}$.*

Démonstration : $\approx$ est en effet la relation d'équivalence associée à l'opération naturelle de $\mathcal{O}(E)$ sur $C \times C$. □

Remarque. Les rotations, les homothéties et les réflexions conservent par définition les angles géométriques.

Proposition 3.16 *La relation $\sim$ est strictement plus fine que la relation $\approx$.*

Démonstration : Soient u, v, u' et v' des vecteurs unitaires. S'il existe une isométrie positive f qui transforme u en u' et v en v', il existe une isométrie qui transforme u en u' et v en v' (!) donc $\sim$ est plus fine que $\approx$. Par contre, soit $\mathcal{B} = (u, v)$ une base orthonormée du plan. Il est clair que $(u, v) \approx (u, -v)$ car la réflexion d'axe $\mathbb{R}u$ transforme bien u en u et v en $-v$, mais (u, v) et $(u, -v)$ ne sont pas équivalents au sens de $\sim$, car la seule isométrie linéaire qui laisse fixe u et transforme v en $-v$ est la réflexion d'axe $\mathbb{R}u$. □

Remarque. Pour tout couple (u, v) de vecteurs unitaires, on a $\widehat{\{u, v\}} = \widehat{(u, v)} \cup \widehat{(v, u)}$. Considérer l'angle géométrique $\widehat{\{u, v\}}$ revient donc à confondre les angles orientés de vecteurs $\widehat{(u, v)}$ et $\widehat{(v, u)}$.

Démonstration : Soit $(u', v') \in \widehat{\{u, v\}}$. On a alors $f(u) = u'$ et $f(v) = v'$ pour un certain f de $\mathcal{O}(E)$. Si f est dans $\mathcal{O}^+(E)$ alors $(u', v') \in \widehat{(u, v)}$. Sinon, en notant s la réflexion échangeant u et v, $f \circ s \in \mathcal{O}^+(E)$ et $f \circ s(u) = v'$ et $f \circ s(v) = u'$ donc $(u', v') \in \widehat{(v, u)}$. L'inclusion réciproque se montre de même. □

Proposition et Définition 3.17 *On définit une application de A dans $[0, \pi]$ en associant à un angle géométrique $\widehat{\{u, v\}}$, le réel m de $[0, \pi]$ tel que m soit une mesure de $\widehat{(u, v)}$ ou de $\widehat{(v, u)}$. Ce réel m s'appelle la mesure de l'angle géométrique $\widehat{\{v, u\}}$.*

Démonstration : Soit $\widehat{\{u, v\}}$ un élément de A. L'angle orienté $\widehat{(u, v)}$ a une unique mesure m dans $]-\pi, \pi]$ (mesure principale). Une mesure de $\widehat{(v, u)}$ est alors $-m$ et seul un des deux réels m et $-m$ est dans l'intervalle $[0, \pi]$. □

Exercice 3.4 Déterminer la somme des mesures des angles géométriques d'un triangle non aplati.

Proposition et Définition 3.18 *On définit une application de A dans $[-1, 1]$ en associant à un angle géométrique $\widehat{\{u, v\}}$, le réel $Cos(\widehat{\{u, v\}}) = <u, v>$ (appelé Cosinus de l'angle géométrique $\widehat{\{u, v\}}$). Cette application est bijective et un angle géométrique est donc caractérisé par son Cosinus.*

Démonstration : Si (u, v) et (u', v') sont deux couples de vecteurs unitaires tels que $\widehat{\{u, v\}} = \widehat{\{u', v'\}}$ alors il existe un élément f de $\mathcal{O}(E)$ tel que $u' = f(u)$ et $v' = f(v)$ et donc

$<u', v'> = <f(u), f(v)> = <u, v>$ car f conserve le produit scalaire.
Le fait que Cos soit surjective est clair (pour $y \in [-1, 1]$, prendre $u = ye_1 + \sqrt{1-y^2}e_2$ et $v = e_1$ où (e_1, e_2) est orthonormée).
Soient θ et θ' deux angles géométriques tels que $\mathrm{Cos}(\theta) = \mathrm{Cos}(\theta')$. Il existe donc des vecteurs unitaires u, v et v' tels que $\theta = \{\widehat{u, v}\}$ et $\theta' = \{\widehat{u, v'}\}$. L'hypothèse $<u, v> = <u, v'>$ implique, car les vecteurs sont unitaires, que ou bien $v = v'$ ou bien v et v' sont symétriques par rapport à la droite $\mathbb{R}u$ (écrire les composantes de v et v' dans une b.o.n. (u, w)), et dans les deux cas, $\theta = \theta'$.
$\square$

3.2.2 Angles de vecteurs dans l'espace

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3. On note C l'ensemble des vecteurs de E de norme 1.

Proposition et Définition 3.19 *Sur l'ensemble $C \times C$ on considère la relation $\sim$ définie par $(u, v) \sim (u', v')$ si et seulement si il existe un élément f de $\mathcal{O}^+(E)$ tel que : $f(u) = u'$ et $f(v) = v'$ ainsi que la relation $\approx$ définie par $(u', v') \approx (u, v)$ si et seulement si il existe un élément f de $\mathcal{O}(E)$ tel que $f(u) = u'$ et $f(v) = v'$. Ces deux relations sont des relations d'équivalence qui sont égales.*
L'ensemble quotient de $C \times C$ par cette relation est par définition l'ensemble des angles de vecteurs de l'espace. Il est noté A.
L'image de (u, v) dans A est par définition l'angle de vecteurs (de l'espace) de u et v et est noté $\{\widehat{u, v}\}$.

Démonstration : Comme dans le cas du plan, le groupe $\mathcal{O}(E)$ (*resp* $\mathcal{O}^+(E)$) opère sur $C \times C$. On en déduit que $\sim$ et $\approx$ sont des relations d'équivalence.
Soient donc x, y, x' et y' des vecteurs de norme 1. Il est clair que $(x', y') \sim (x, y)$ implique $(x', y') \approx (x, y)$.
Réciproquement, supposons $(x', y') \approx (x, y)$ c'est à dire qu'il existe une isométrie f telle que $x' = f(x)$ et $y' = f(y)$. Il s'agit de montrer qu'il existe une isométrie paire g telle que $x' = g(x)$ et $y' = g(y)$. Si f est paire, il n'y a rien à démontrer. Si f est impaire, soient F un plan contenant x' et y' et s la réflexion d'axe F, de sorte que $s(x') = x'$ et $s(y') = y'$. Soit $g = s \circ f$. Il est clair que $x' = g(x)$ et $y' = g(y)$ et de plus, $\det(g) = \det(s \circ f) = -1 \times \det(f) = +1$.
$\square$

3.2.3 Angles et droites

On peut également définir les notions d'angles orienté de droites, d'angle non orienté de droites ...
Nous ne détaillerons pas ici cette étude.