Chapitre 1

Rappels sur les espaces et applications affines

1.1 Espaces et sous-espaces affines

1.1.1 Espaces affines

Définition 1.1 *On dit que le triplet $(X, \overrightarrow{X}, \Phi)$ est un espace affine (réel) de direction $\overrightarrow{X}$ si X est un ensemble non vide, $\overrightarrow{X}$ un espace vectoriel (réel) et $\Phi : X \times X \to \overrightarrow{X}$ une application vérifiant :*

- *1) $\forall x \in X,\ \Phi_x : X \to \overrightarrow{X},\ y \mapsto \Phi(x, y)$ est bijective*
- *2) $\forall x, y, z \in X,\ \Phi(x, y) + \Phi(y, z) = \Phi(x, z)$ (relation de Chasles).*

On note alors $\overrightarrow{xy} = \Phi(x, y)$ et la relation de Chasles s'écrit $\overrightarrow{xz} = \overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz}$.
Lorsque $\overrightarrow{X}$ est de dimension finie, la dimension de l'espace affine X est par définition celle de $\overrightarrow{X}$.

Remarque et notation. Soit $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$. Soit $x \in X$. L'application Φ_x étant bijective, il existe un unique $y \in X$ tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{xy}$. L'application de X dans lui-même qui à x associe y est appelée *translation* de vecteur $\overrightarrow{u}$ et notée $t_{\overrightarrow{u}}$. Plutôt que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{xy}$, on note alors $y = x + \overrightarrow{u}$ c'est à dire $y = x + \overrightarrow{xy}$ (*notation de Grassmann*).

Exemple. Tout espace vectoriel $\overrightarrow{X}$ a une structure naturelle d'espace affine (en posant $X = \overrightarrow{X}$ et $\Phi : (x, y) \mapsto y - x$).

Dans toute la suite, $(X, \overrightarrow{X}, \Phi)$ est un espace affine réel, noté plus simplement X.

1.1.2 Sous-espaces affines

Définition 1.2 *Une partie F de X est un sous-espace affine (s.e.a.) (on dit aussi variété linéaire affine) s'il existe un point A de X et un sous-espace vectoriel $\overrightarrow{F}$ de $\overrightarrow{X}$ tel que $F = A + \overrightarrow{F} = \{M \in X,\ \overrightarrow{AM} \in \overrightarrow{F}\}$.*

Remarque. Un sous-espace affine est donc toujours non vide.

Propriété. Soient $A, A' \in X$ et $\overrightarrow{F}, \overrightarrow{F'}$ des sous-espaces vectoriels de $\overrightarrow{X}$. Alors :

$$A + \overrightarrow{F} = A' + \overrightarrow{F'} \iff \overrightarrow{F} = \overrightarrow{F'} \text{ et } \overrightarrow{AA'} \in \overrightarrow{F}$$

On parle alors du *sous-espace affine passant par A et de direction $\overrightarrow{F}$*. De plus, lorsque $\overrightarrow{F}$ est de dimension finie, la dimension du sous-espace affine F est par définition celle de $\overrightarrow{F}$.

Démonstration : $\Rightarrow$: Soient $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{F}$ et $M = A + \overrightarrow{u}$. On a alors $A, A' \in A' + \overrightarrow{F'}$; or $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'M} - \overrightarrow{A'A}$ donc $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{F'}$ puisque cet ensemble est stable par combinaison linéaire. De même $\overrightarrow{F'} \subset \overrightarrow{F}$.
$\Leftarrow$: Soit $M \in A + \overrightarrow{F}$ alors $\overrightarrow{AM} \in \overrightarrow{F}$. $\overrightarrow{A'M} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AA'} \in \overrightarrow{F} = \overrightarrow{F'}$ donc $M \in A' + \overrightarrow{F'}$. L'inclusion réciproque se montre de même. □

Remarques.

- Si F est un s.e.a. de X de direction $\overrightarrow{F}$ alors $(F, \overrightarrow{F}, \Phi_F)$ est un espace affine (où l'on a noté $\Phi_F : F \times F \to \overrightarrow{F}$, $(x, y) \mapsto \Phi(x, y)$).
- Si F est un s.e.a. alors pour tout A de F on a : $F = A + \overrightarrow{F}$.

Exemples.

- Si M est un point de X, le singleton $\{M\}$ est un sous-espace affine de X (de direction $\{\overrightarrow{0}\}$).
- On appelle droite affine tout sous-espace affine de X de la forme $A + \overrightarrow{F}$ où A est un point de X et $\overrightarrow{F}$ une droite vectorielle de $\overrightarrow{X}$.

Exercice 1.1 Montrer que par deux points distincts A et B de X il passe une unique droite affine que l'on notera (AB).

1.1.3 Sous-espace affine engendré

Propriété. Une intersection de sous-espaces affines de X est ou bien vide ou bien un sous-espace affine (dirigé par l'intersection des directions des s.e.a.).
Démonstration : La démonstration, immédiate, est laissée au lecteur. □

Exercice 1.2 Soient F et G deux s.e.a. de X tels que $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$ soient supplémentaires dans $\overrightarrow{X}$. Montrer que $F \cap G$ est un singleton.

Définition 1.3 *Soit Y une partie non vide de l'espace affine X. On appelle sous-espace affine engendré par Y (et on note Aff(Y)) le plus petit sous-espace affine de X contenant Y : c'est l'intersection de tous les sous-espaces affines de X contenant Y.*

Exercice 1.3 Trois points de X sont dits alignés s'ils appartiennent à une même droite. Montrer que le sous-espace affine engendré par trois points non alignés est un plan affine (s.e.a. de direction un plan vectoriel).

1.2 Parallélisme

Définition 1.4 *Soient F et G deux sous-espaces affines de X de directions respectives $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$. On dit que F est parallèle à G (et on note $F//G$) si $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{G}$. On dit que F est faiblement parallèle à G si $\overrightarrow{F} \subset \overrightarrow{G}$.*

Exercice 1.4 Montrer que le parallélisme (respectivement le parallélisme faible) est une relation d'équivalence (respectivement une relation réflexive et transitive) sur l'ensemble des sous-espaces affines de X.

Exercice 1.5 Montrer que deux sous-espaces affines sont parallèles si et seulement s'il existe une translation qui envoie l'un sur l'autre.

Propriétés. Soient F et G deux sous-espaces affines de X.

- Si $F//G$ alors $F = G$ ou $F \cap G = \emptyset$.
- Si F est faiblement parallèle à G alors $F \subset G$ ou $F \cap G = \emptyset$.
- Pour que F soit faiblement parallèle à G, il faut et il suffit que F soit parallèle à un sous-espace affine de G.

Démonstration : Le premier point est clair : si $F \cap G \neq \emptyset$, on prend $A \in F \cap G$ et alors $F = A + \overrightarrow{F} = A + \overrightarrow{G} = G$. Le deuxième point se montre de même. Pour le troisième, le sens direct est immédiat (on choisit A dans G et $A + \overrightarrow{F}$ est un s.e.a. de G parallèle à F). Réciproquement, si F est faiblement parallèle à H (s.e.a. de G) alors $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{H} \subset \overrightarrow{G}$. □

Exercice 1.6 Montrer que par tout point de X il passe une unique droite affine parallèle à une droite donnée.

1.3 Barycentres - Caractérisations barycentriques

1.3.1 Notion de barycentre

Proposition 1.5 *Soient $A_1, \cdots, A_n$ n points de X (distincts ou non) et $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ n réels. L'application $f : X \to \overrightarrow{X}$, $M \mapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$ (appelée fonction vectorielle de Leibniz) est :*

- *constante si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$*
- *bijective sinon.*

Démonstration : Fixons un point O de X. Pour tout point M, la relation de Chasles donne $f(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MO} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right) \overrightarrow{MO} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$ et les deux résultats en découlent. □

Définition 1.6 *Étant donnés n points (distincts ou non) $A_1, \cdots, A_n$ de X et n réels $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, l'unique point G de X vérifiant $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$ est appelé barycentre du système de points pondérés $\{(A_1, \alpha_1), \cdots, (A_n, \alpha_n)\}$.*
Lorsqu'en outre tous les α_i sont égaux, on parle d'isobarycentre.

Remarque. Le réel $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ est appelé *poids total* du système de points pondérés $\{(A_1, \alpha_1), \cdots, (A_n, \alpha_n)\}$.

Lorsque ce poids total est égal à 1, on note $G = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i$.

Propriétés.

- Si A et B sont deux points distincts de X, l'ensemble des barycentres de A et B n'est autre que la droite (AB).
- Le barycentre d'un système de points pondérés est indépendant de l'ordre de ces points.
- *(Homogénéité du barycentre)* Le barycentre d'un système de points pondérés est inchangé lorsqu'on multiplie chacun des scalaires par un même scalaire non nul.

- Dire que G est le barycentre du système $\{(A_1, \alpha_1), \cdots, (A_n, \alpha_n)\}$ revient à dire que pour tout point M de X, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{MG}$.

Théorème 1.7 (Associativité du barycentre) *On ne change pas le barycentre d'un système de points pondérés lorsqu'on remplace un certain nombre de points pondérés dont le poids total est non nul par leur barycentre affecté de ce poids total.*

Exercice 1.7 Montrer que les trois médianes d'un triangle sont concourantes en le centre de gravité du triangle.

1.3.2 Caractérisation barycentrique d'un s.e.a.

Proposition 1.8 (Caractérisations barycentrique d'un sous-espace affine) *Une partie non vide F de X est un sous-espace affine si et seulement si tout barycentre de points de F est encore un point de F.*

Démonstration : $\Rightarrow$: Soient $A_1, \cdots, A_n$ n points de $F = A + \overrightarrow{F}$ et $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ avec $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n \neq 0$. Notons G le barycentre de $\{(A_i, \alpha_i),\ i \in \{1, \cdots n\}\}$. On a alors :
$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{AA_i} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{AG}$ donc $\overrightarrow{AG}$ est dans $\overrightarrow{F}$ comme combinaison linéaire de vecteurs de $\overrightarrow{F}$.
$\Leftarrow$: Soit $A \in F$. Notons $\overrightarrow{F} = \{\overrightarrow{AM},\ M \in F\}$ et vérifions que $\overrightarrow{F}$ est un s.e.v. On a $\overrightarrow{0} \in \overrightarrow{F}$.
Soient $u = \overrightarrow{AM} \in \overrightarrow{F}$ (avec $M \in F$) et $\lambda \in \mathbb{R}$. Le vecteur $\lambda u = \overrightarrow{AM}$ peut s'écrire $\lambda u = \overrightarrow{AM'}$ et donc $\overrightarrow{M'A} + \lambda(\overrightarrow{AM'} + \overrightarrow{MM'}) = \overrightarrow{0}$ soit $(1 - \lambda)\overrightarrow{M'A} + \lambda \overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{0}$. M' est donc le barycentre de $\{(A, 1 - \lambda), (M, \lambda)\}$ et donc est dans F. Par suite, $\lambda u \in \overrightarrow{F}$.
Soient à présent $u = \overrightarrow{AM}$ et $v = \overrightarrow{AM'}$ dans $\overrightarrow{F}$. Soit G le barycentre de $\{(M, 1), (M', 1)\}$. On a alors $u + v = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AM'} = 2\overrightarrow{AG} \in \overrightarrow{F}$. □

Conséquence. Le sous-espace affine engendré par une partie Y non vide de X est l'ensemble de tous les barycentres des points de Y.

1.3.3 Convexité

Définition 1.9 *Étant donnés deux points (distincts ou non) A et B de X, on appelle segment d'extrémités A et B l'ensemble noté $[AB]$ défini par $[AB] = \{M \in X,\ \exists t \in [0, 1],\ M = A + t\overrightarrow{AB}\}$.*

Remarque. Lorsque A et B sont distincts, $[AB]$ est une partie de la droite (AB) ; c'est aussi l'ensemble des barycentres de A et B affectés de coefficients positifs.

Définition 1.10 *Une partie non vide $\mathcal{C}$ de l'espace affine X est dite convexe si elle contient tout segment dont elle contient les extrémités.*

Exemples. Tout sous-espace affine est convexe. Tout segment est convexe.

Propriété. Une intersection de parties convexes est vide ou convexe.

Définition 1.11 *Soit Y une partie non vide de l'espace affine X. On appelle enveloppe convexe de Y la plus petite partie convexe de X contenant Y : c'est l'intersection de tous les convexes de X contenant Y.*

Exercice 1.8 Étant donnés quatre points non coplanaires A, B, C, D d'un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 3, on appelle *tétraèdre* de sommets A, B, C, D l'enveloppe convexe T de ces quatre points. Montrer que T n'est autre que l'ensemble des barycentres de ces quatre points affectés de masses positives ou nulles.

1.4 Repère affine - Coordonnées

On suppose que X est un espace affine (réel) de **dimension finie** notée n.

1.4.1 Repère affine

Définition 1.12 *Soit $k \in \mathbb{N}$. $k+1$ points $a_0, \cdots, a_k$ de X sont dits affinement indépendants si le sous-espace affine qu'ils engendrent est de dimension k.*

Exercice 1.9 Montrer que trois points non alignés de X sont affinement indépendants.

Définition 1.13 *Soit F un s.e.a. de X de dimension k. On appelle repère affine de F toute suite de $k+1$ points $a_0, \cdots, a_k$ de F affinement indépendants.*

Proposition 1.14 *Soit F un sous-espace affine de X de dimension k. Un $(k+1)$-uplet $(a_0, \cdots, a_k)$ de points de F est un repère affine de F si et seulement si $(\overrightarrow{a_0a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_0a_k})$ est une base de $\overrightarrow{F}$.*

Démonstration : $\Rightarrow$. Montrons que $(\overrightarrow{a_0a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_0a_k})$ est génératrice de $\overrightarrow{F}$ (c'est suffisant car $\overrightarrow{F}$ est de dimension finie). Soit $u \in \overrightarrow{F}$. Il existe alors un point m de F tel que $u = \overrightarrow{a_0m}$ et donc par hypothèse m est barycentre de $a_0, \cdots, a_k$ et on peut écrire $\lambda_0\overrightarrow{a_0m} + \cdots + \lambda_k\overrightarrow{a_km} = \overrightarrow{0}$ avec $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i \neq 0$. Par suite, $u = \overrightarrow{a_0m} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{k} \lambda_i}(\lambda_1\overrightarrow{a_0a_1} + \cdots + \lambda_k\overrightarrow{a_ka_0}) \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{a_0a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_0a_k})$.
$\Leftarrow$. Soit $m \in F$. Alors $\overrightarrow{a_0m}$ est dans $\overrightarrow{F}$ donc s'écrit par hypothèse $\overrightarrow{a_0m} = \lambda_1\overrightarrow{a_0a_1} + \cdots + \lambda_k\overrightarrow{a_0a_k}$ et donc $m = \mathrm{Bar}\{(a_0, 1 - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i), (a_1, \lambda_1), \cdots, (a_k, \lambda_k)\} \in Aff(\{a_0, \cdots, a_k\})$.
Réciproquement, si $m \in Aff(\{a_0, \cdots, a_k\})$ alors on peut écrire $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i\overrightarrow{ma_1} = \overrightarrow{0}$ et donc $\overrightarrow{a_0m} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{k} \lambda_i}(\lambda_1\overrightarrow{a_0a_1} + \cdots + \lambda_k\overrightarrow{a_ka_0}) \in \overrightarrow{F}$ et $m \in F$. □

1.4.2 Coordonnées cartésiennes

On suppose X muni d'un repère affine $(a_0, \cdots, a_n)$. Pour tout point M de X le vecteur $\overrightarrow{a_0M}$ se décompose de manière unique dans la base $(\overrightarrow{a_0a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_0a_n})$ sous la forme $\overrightarrow{a_0M} = \sum_{i=1}^{n} x_i\overrightarrow{a_0a_i}$ où les x_i sont des réels.

Définition 1.15 *Avec les notations ci-dessus, les x_i sont appelés coordonnées (cartésiennes) du point M dans le repère $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$, d'origine a_0, de X.*

1.4.3 Coordonnées barycentriques

On suppose X muni d'un repère affine $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$. Le s.e.a. engendré par $a_0, a_1, \cdots, a_n$ est alors égal à X et donc tout point M de X s'écrit comme barycentre de $a_0, a_1, \cdots, a_n$. Les masses correspondantes $(\lambda_0, \cdots, \lambda_n)$, uniques si l'on impose la condition $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$ (normalisation), sont appelées coordonnées barycentriques de M dans le repère $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$.

1.5 Applications affines

1.5.1 Définition et premières propriétés

Définition 1.16 *Soient X et Y deux espaces affines réels de dimensions finies d'espaces vectoriels associés $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$. Une application $f : X \longrightarrow Y$ est dite affine s'il existe un point A de X tel que l'application $\overrightarrow{f_A} : \overrightarrow{X} \to \overrightarrow{Y}$, $u = \overrightarrow{AM} \longmapsto \overrightarrow{f_A}(u) = \overrightarrow{f(A)f(M)}$ soit linéaire.*

Propriété. Montrer que lorsque $f : X \longrightarrow Y$ est affine, l'application $\overrightarrow{f_A}$ est indépendante du choix de A dans X. On l'appelle l'application linéaire associée à f.
Démonstration : Fixons $A \in X$ tel que $\overrightarrow{f_A}$ soit linéaire et soit $B \in X$. Soit $u \in \overrightarrow{X}$. On peut écrire $u = \overrightarrow{BM}$ pour un certain point M de X et donc $u = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}$ (relation de Chasles). Par linéarité de $\overrightarrow{f_A}$, $\overrightarrow{f_A}(u) = \overrightarrow{f(A)f(M)} - \overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{f(B)f(M)} = \overrightarrow{f_B}(u)$. □

Proposition 1.17 *Soient $\overrightarrow{f}$ une application linéaire de $\overrightarrow{X}$ dans $\overrightarrow{Y}$, A un point de X et B un point de Y. Il existe une unique application affine f de X dans Y vérifiant $f(A) = B$ et d'application linéaire associée $\overrightarrow{f}$.*
Cette application est définie par la formule $\forall M \in X,\ f(M) = B + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM})$.

Exemples. Les translations, les homothéties, les projections, les symétries sont des applications affines.

Propriétés.

- Une application affine $f : X \to X$ est une translation si et seulement si $\overrightarrow{f}$ est l'identité de $\overrightarrow{X}$.
- Une application affine $f : X \to X$ est une homothétie ou une translation si et seulement si $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*$, $\overrightarrow{f} = \lambda id_{\overrightarrow{X}}$.

Exercice 1.10 Démontrer ces deux propriétés.

1.5.2 Caractérisations d'une application affine

Proposition 1.18 (Caractérisation barycentrique d'une application affine) *Soient X et Y deux espaces affines réels de dimensions finies et $f : X \longrightarrow Y$. Alors f est affine si et seulement si f conserve les barycentres.*

Démonstration : On note $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ les espaces vectoriels associés à X et Y. Supposons tout d'abord f affine. Soit $(A_i, \alpha_i)_{(1\leq i\leq n)}$ une famille finie de points pondérés de X telle que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$ et soit G le barycentre de cette famille. Par définition, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$ et donc en appliquant $\overrightarrow{f}$ (où $\overrightarrow{f}$ est la partie linéaire de f), $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{GA_i}\right) = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{0}\right) = \overrightarrow{0}$ et donc $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{f(G)f(A_i)} = \overrightarrow{0}$ ce qui traduit que $f(G)$ est le barycentre du système $(f(A_i), \alpha_i)_{(1\leq i\leq n)}$.
Supposons réciproquement que f conserve les barycentres.
Fixons A dans X et considérons l'application $\varphi : \overrightarrow{X} \to \overrightarrow{Y}$, $u = \overrightarrow{AM} \mapsto \overrightarrow{f(A)f(M)}$. On va montrer que φ est linéaire. Soient alors $u, v \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On peut écrire (de manière unique) $u = \overrightarrow{AM}$ et $v = \overrightarrow{AN}$ avec $M, N \in \mathcal{A}$. Posons $w = \alpha u + v = \overrightarrow{AP}$. Alors $\overrightarrow{AP} - \alpha\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{0}$ soit $(1-\alpha-1)\overrightarrow{AP} - \alpha\overrightarrow{PM} - \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{0}$ donc P est barycentre du système $\{(A,\alpha),(M,-\alpha),(N,-1)\}$. On en déduit que $f(P)$ est le barycentre de $\{(f(A),\alpha),(f(M),-\alpha),(f(N),-1)\}$ et donc que $\alpha\overrightarrow{f(P)f(A)} - \alpha\overrightarrow{f(P)f(M)} - \overrightarrow{f(P)f(N)} = \overrightarrow{0}$. Par suite, $(-\alpha+\alpha-1)\overrightarrow{f(P)f(A)} + \alpha\overrightarrow{f(A)f(M)} + \overrightarrow{f(A)f(N)} = \overrightarrow{0}$ soit $-\varphi(\overrightarrow{PA}) + \alpha\varphi(\overrightarrow{AM}) + \varphi(\overrightarrow{AN}) = \overrightarrow{0}$ ou encore $\varphi(\alpha u + v) = \alpha\varphi(u) + \varphi(v)$. □

Conséquences. Par une application affine, l'image d'un s.e.a. est un s.e.a. (plus précisément, $f(A + \overrightarrow{F}) = f(A) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{F})$), l'image d'un convexe est un convexe, ...

Proposition 1.19 *Soient X et Y deux espaces affines, $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ un repère de X et $b_0, b_1, \cdots, b_n$ des points quelconques de Y. Alors, il existe une unique application affine f de X dans Y qui vérifie pour tout i dans $\{0, 1, \cdots, n\}$, $f(a_i) = b_i$.*

1.5.3 Points fixes

Proposition 1.20 *L'ensemble des points fixes d'une application affine $f : X \to X$ est ou bien vide ou bien une variété affine dirigée par Ker$(\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{X}})$.*

Démonstration : S'il existe un point C de X fixe par f, montrons que l'ensemble F des points fixes de f est égal à $G = C + \text{Ker}(\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{X}})$. Soit A un point de G, alors on a l'égalité $f(A) = C + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{CA})$, or, puisque les points C et A sont dans G, le vecteur $\overrightarrow{CA}$ appartient à la direction de G, soit $\text{Ker}(\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{X}})$, donc le vecteur $\overrightarrow{CA}$ est fixe par $\overrightarrow{f}$ et $f(A)$ vaut A, c'est-à-dire que le point A appartient à F. Soit B un point de F, on a l'égalité $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{f(C)f(B)} = \overrightarrow{CB}$ donc le vecteur $\overrightarrow{CB}$ est dans $\text{Ker}(\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{X}})$ et le point $B = C + \overrightarrow{CB}$ appartient à G. □

Théorème 1.21 *Soit $f : X \to X$ (où X est un espace affine réel de dimension finie) une application affine. f a un unique point fixe si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de $\overrightarrow{f}$.*

Démonstration : Si f admet un unique point fixe, l'ensemble de ses points fixes est un sous-espace affine de direction $\{0\} = \text{Ker}(\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{X}})$, donc 1 n'est pas valeur propre de f. Réciproquement, si 1 n'est pas valeur propre de f, fixons un point A de X. Soit $M \in X$.

$$\begin{aligned} f(M) = M &\iff \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{Af(M)} = \overrightarrow{Af(A)} + \overrightarrow{f(A)f(M)} \\ &\iff (\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{X}})(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{f(A)A} \\ &\iff \overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{X}})^{-1}(\overrightarrow{f(A)A}) \end{aligned}$$

Car par hypothèse $\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{X}}$ est injective donc bijective. f a donc bien un unique point fixe. □

1.5.4 Groupe affine

Propriété. La composée de deux applications affines f et g est une application affine de partie linéaire $\overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g}$.
Démonstration : Notons f et g ces deux applications et posons $\overrightarrow{f \circ g} = \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g}$. Il est alors clair que $\overrightarrow{f \circ g}$ est linéaire et que $\overrightarrow{f \circ g} : E \to E, u = \overrightarrow{AM} \mapsto \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g}\left(\overrightarrow{AM}\right) = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{g(A)g(M)}\right) = \overrightarrow{f \circ g(A) f \circ g(M)}$ ce qui prouve que $f \circ g$ est affine. □

Proposition 1.22 *Une application affine est injective (respectivement surjective) si et seulement si sa partie linéaire l'est. De plus, la réciproque d'une bijection affine est une application affine.*

Démonstration : Injectivité : Fixons un point A de X et un vecteur $\overrightarrow{u}$ de Ker$\overrightarrow{f}$. Si f est injective, comme $f(A + \overrightarrow{u}) = f(A) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = f(A)$ alors $A + \overrightarrow{u} = A$ et donc $\overrightarrow{u} = 0$ et $\overrightarrow{f}$ est injective.
Réciproquement, si deux points M et N ont même image par f, le vecteur $\overrightarrow{f(M)f(N)}$ est nul, donc $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{0}$ et par suite $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{0}$ et les points M et N sont confondus : f est donc injective.
Surjectivité : Fixons un point A de X. Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur de $\overrightarrow{Y}$. Si f est surjective, il existe un point M de X tel que $f(M) = f(A) + \overrightarrow{v}$. Mais on a aussi $f(M) = f(A) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM})$ donc $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM})$ et $\overrightarrow{f}$ est surjective.

Réciproquement, Soit W un point de Y. Posons $B = f(A)$. On a $W = B + \overrightarrow{BW}$. Comme $\overrightarrow{f}$ est surjective, il existe un vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\overrightarrow{X}$ tel que $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{BW}$. Alors W est l'image du point $C = A + \overrightarrow{u}$ et f est surjective. □

Proposition et Définition 1.23 *Une application affine bijective $f : X \to X$ est appelée automorphisme affine de X. Les automorphismes affines forment un groupe pour la composition des applications qu'on appelle groupe affine de X et qu'on note $GA(X)$.*

Remarque. L'application $f \mapsto \overrightarrow{f}$ de $GA(X)$ dans $GL(\overrightarrow{X})$ est un morphisme de groupes, surjectif et de noyau l'ensemble des translations de X.

1.5.5 Décomposition canonique

Proposition 1.24 *Soient $f : X \to X$ une application affine et $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{X}$. f et $t_{\overrightarrow{u}}$ commutent si et seulement si $\overrightarrow{u} \in Ker(\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{X}})$.*

Démonstration : Les applications f et $t_{\overrightarrow{u}}$ commutent si et seulement si on a :

$$\forall M \in X, \left(f \circ t_{\overrightarrow{u}}\right)(M) = \left(t_{\overrightarrow{u}} \circ f\right)(M)$$

c'est à dire si et seulement si $\forall M \in X,\ f(M) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = f(M) + \overrightarrow{u}$
ce qui équivaut bien à $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{X}})$. □

Théorème 1.25 *Si une application affine $f : X \to X$ vérifie $\overrightarrow{X} = Ker(\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{X}}) \oplus \mathrm{Im}(\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{X}})$ alors f s'écrit de manière unique sous la forme $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ g$ où $u \in Ker(\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{X}})$, g est une application affine admettant un point fixe et g et $t_{\overrightarrow{u}}$ commutent.*

Démonstration : Soit donc $f : X \to X$ affine telle que $\overrightarrow{X} = \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{X}}) \oplus \mathrm{Im}(\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{X}})$.

- Existence. Fixons $A \in X$. On a alors $\overrightarrow{Af(A)} \in \overrightarrow{X} = \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{X}}) + \mathrm{Im}(\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{X}})$ donc on peut écrire $\overrightarrow{Af(A)} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ avec $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{w}) - \overrightarrow{w}$. Soit alors M dans X tel que $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{w}$. On a $\overrightarrow{Mf(M)} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{Af(A)} + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} - \overrightarrow{f}(\overrightarrow{w}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}$. Par suite, $t_{-\overrightarrow{u}} \circ f(M) = f(M) - \overrightarrow{u} = f(M) - \overrightarrow{Mf(M)} = M$. Le résultat en découle puisqu'en outre $t_{-\overrightarrow{u}}$ et f commutent (car $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{X}})$).
- Unicité. Supposons donc $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ g = t_{\overrightarrow{v}} \circ h$ et posons $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}$. Remarquons que $w \in \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{X}})$. Soient d'autre part M un point fixe de g et N un point fixe de h. Comme $g = t_{\overrightarrow{w}} \circ h$, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{h(M)M}$ et donc :

  $$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{h(M)h(N)} + \overrightarrow{NM} = (\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{X}})(\overrightarrow{MN}) \in \mathrm{Im}(\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{X}})$$

  Finalement $\overrightarrow{w} \in \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{X}}) \cap \mathrm{Im}(\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{X}})$ et donc $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$.
  On en déduit immédiatement $g = h$.

□