Université de Rennes 1 Licence 3 de Mathématiques **2010-2011**

GEEU : Contrôle continu du mardi 22 février 2011

Durée : 1 h - Aucun document autorisé

Le barème est donné à titre indicatif

$\boxed{\textbf{Question de cours}}$ *(4 points)*

Rappeler les différents types d'automorphismes othogonaux de $\mathbb{R}^3$. On précisera dans chaque cas la forme de la matrice d'un tel automorphisme dans une base orthonormée adaptée.

$\boxed{\textbf{Exercice n°1}}$ *(4 points)*

Soient E un espace vectoriel euclidien et F et G deux sous-espaces de E supplémentaires. On note s la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Montrer que s est une isométrie si et seulement si $F = G^{\perp}$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°2}}$ *(8 points)*

On se place dans un espace affine euclidien X. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ et $A_1, \cdots, A_n \in X$. On considère la fonction $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout M de X par $F(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i {MA_i}^2$.

1) On suppose $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$. Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{v}$ de $\overrightarrow{X}$, tel que

$$\forall M, M' \in X,\ F(M') = F(M) + 2 < \overrightarrow{MM'}, \vec{v} > \qquad (\vec{v} \text{ indépendant de } M \text{ et } M')$$

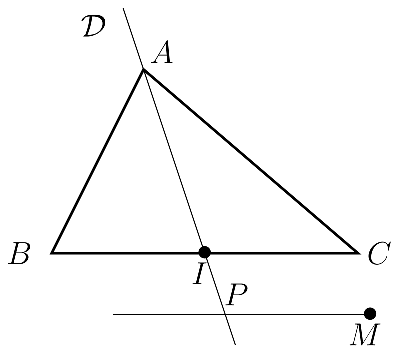
Pour $k \in \mathbb{R}$, en déduire la nature de l'ensemble des points M de X tels que ${MA_1}^2 - {MA_2}^2 = k$. *(On prendra garde aux cas particuliers.)*

2) On suppose à présent que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$. Montrer que $F(M) = F(G) + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) MG^2$ où G est le barycentre du système $\{(A_1, \alpha_1), \cdots, (A_n, \alpha_n)\}$.

En déduire la nature de l'ensemble des points M de X tels que ${MA_1}^2 + {MA_2}^2 = k$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°3}}$ *(4 points)*

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère affine (A, B, C). Soit M un point de $\mathcal{P}$ de coordonnées barycentriques (α, β, γ).



1) Donner une condition nécessaire et suffisante liant α, β et γ pour que M soit sur la médiane $\mathcal{D}$ issue de A dans le triangle ABC.

2) Déterminer les coordonnées barycentriques du projeté de M sur $\mathcal{D}$ parallèlement à (BC).