Université de Rennes 1 **2005-2006**

Préparation au CAPES de Mathématiques

Fonction uniformément continue

Exercice

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ uniformément continue.

1) Montrer que $|f|$ est uniformément continue.

2) Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait :

$$\forall x \in [n\alpha, (n+1)\alpha],\ |f(x)| < 1 + |f(n\alpha)|$$

3) En déduire qu'il existe des réels a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $|f(x)| \leq ax + b$.

4) Utiliser 3) pour étudier la continuité uniforme de $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$.

5) La condition 3) est-elle suffisante pour avoir la continuité uniforme ?

Correction rapide :

1) Clair : cela résulte de la définition et de l'inégalité triangulaire.

2) L'uniforme continuité de $|f|$ assure (choix de $\varepsilon = 1$) l'existence de $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall X, Y \in [0, +\infty[,\ |X - Y| \leq \alpha \Longrightarrow ||f|(X) - |f|(Y)| < 1 \qquad (*)$$

Soient alors $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [n\alpha, (n+1)\alpha]$. On a $|x - n\alpha| \leq \alpha$ et le résultat annoncé en découle.

3) Soit $x > 0$. Soit n un entier naturel tel que $x \in [n\alpha, (n+1)\alpha]$. On a :

$$|f(x)| = |f(x)| - |f(x-\alpha)| + |f(x-\alpha)| - |f(x-2\alpha)| + \cdots + |f(x-(n-1)\alpha)| - |f(x-n\alpha)| + |f(x-n\alpha)|$$

et donc, compte tenu de $(*)$, $|f(x)| \leq n + |f(x - n\alpha)|$. Or on a $n\alpha \leq x \leq n\alpha + \alpha$ donc $n \leq \frac{x}{\alpha}$ et $0 \leq x - n\alpha \leq \alpha$. Finalement :

$$\forall x > 0,\ |f(x)| \leq ax + b \qquad \text{où } a = \frac{1}{\alpha} \text{ et } b = \sup_{t \in [0,\alpha]} |f(t)|$$

4) Comme on ne peut pas trouver de réels a et b tels que $\forall x > 0$, $x^2 \leq ax + b$, on déduit : g n'est pas uniformément continue.

5) La condition 3) n'est pas suffisante. Par exemple, la fonction $h : x \mapsto \sin(x^2)$ est continue et bornée sur $[0, +\infty[$ mais n'est pas uniformément continue. En effet, si l'on pose $x_n = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ et $y_n = \sqrt{3\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, on a $h(x_n) - h(y_n) = 2$ et ce bien que $\lim_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$.