Université de Rennes 1 **2005-2006**

Préparation au CAPES de Mathématiques

Problème n° 3 : Une démonstration du théorème de Weierstrass

A rendre pour le jeud 13 octobre 2005

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et nulles en dehors d'un compact. On munit E du *produit de convolution* $\star$ en définissant pour tout $(f,g) \in E^2$ la *convolée* :

$$f \star g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\,dt$$

Partie 1 : Propriétés de la convolution

1) Montrer que la loi $\star$ est commutative et distributive par rapport à l'addition.

2) Soit f une fonction réelle que l'on veut "régulariser ". Pour ce faire, on remplace $f(x_0)$ par la valeur moyenne de f sur un petit intervalle $[x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}]$ c'est à dire par $g_n(x_0) = \dfrac{n}{2}\displaystyle\int_{x_0-\frac{1}{n}}^{x_0+\frac{1}{n}} f(t)\,dt$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Soit φ_n la fonction valant $\frac{n}{2}$ sur $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ et 0 ailleurs. Montrer que $g_n(x_0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0 - t)\varphi_n(t)\,dt$. On notera encore $g_n = f \star \varphi_n$.

b) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que si f est continue en x_0 alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} g_n(x_0) = f(x_0)$.

Partie 2 : Approximation de l'identité

On appelle approximation de l'identité (ou fonctions régularisantes) toute suite (φ_n) de fonctions de E positives et vérifiant :

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(t)\,dt = 1$
- $\forall \alpha > 0,\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{|t|>\alpha} \varphi_n(t)\,dt = 0$

1) Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $a_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-t^2)^n\,dt$ et $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{a_n}(1-t^2)^n & \text{si } |t| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Montrer que la suite (h_n) est une approximation de l'unité.

2) Soient $f \in E$ et (φ_n) une approximation de l'unité. Montrer que la suite de fonctions $(f \star \varphi_n)$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Partie 3 : Théorème de Weierstrass

1) Soit $f \in E$. Montrer que $f \star h_n$ est, en restriction à $[-1, 1]$, une fonction polynôme.

2) Montrer que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue alors f est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions polynômes.