Université de Rennes 1 **2005-2006**

CAPES de Mathématiques

Corrigé rapide du Problème n° 2

Partie 1 : Continuité de la fonction f

1) Il est immédiat que $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leq f_0(x) \leq \frac{1}{2}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{2.4^n}$. Ce majorant est la borne supérieure cherchée puisqu'il est atteint pour $x = \frac{1}{2.4^n}$.

2) La suite (f_n) est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$ et le premier résultat en découle. D'autre part, f_0 est continue sur $\mathbb{R}$ donc il en est de même des fonctions f_n et donc de f par convergence uniforme.

Partie 2 : Non dérivabilité de f

1) Soient $x_0 > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

a) L'intervalle $\left]4^{n-1}x_0 - \frac{1}{4}, 4^{n-1}x_0 + \frac{1}{4}\right[$ est ouvert et de largeur $\frac{1}{2}$ donc contient au plus un élément de $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Par suite, l'un au moins des deux intervalles $\left]4^{n-1}x_0 - \frac{1}{4}, 4^{n-1}x_0\right[$ et $\left]4^{n-1}x_0, 4^{n-1}x_0 + \frac{1}{4}\right[$ ne contient aucun élément de $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$.

b) On a $\tau_{n,p,\varepsilon} = \dfrac{f_0(4^p x_0 + \varepsilon 4^{p-n}) - f_0(4^p x_0)}{\varepsilon 4^{p-n}}$.

Si $p \geq n$ alors $\varepsilon 4^{p-n} \in \mathbb{Z}$ et donc $\tau_{n,p} = 0$ (car f_0 est 1-périodique).

Supposons $p \leq n-1$. Si $]4^p x_0 + \frac{\varepsilon}{4}, 4^p x_0[$ contenait un élément r de $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ alors $]4^{n-1}x_0 + \frac{\varepsilon}{4}, 4^{n-1}x_0[$ contiendrait $4^{n-1-p}r \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ ce qui serait contradictoire. Par suite, $]4^p x_0 + \varepsilon 4^{p-n}, 4^p x_0[$ ne contient pas non plus d'élément de $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$.

Ceci montre que $\forall p \in \{0, \cdots, n-1\}$, $|\tau_{n,p,\varepsilon}| = 1$ puisqu'il est immédiat que $\forall x, y \in]0, \frac{1}{2}[$, $f_0(x) - f_0(y) = x - y$ et $\forall x, y \in]\frac{1}{2}, 1[$, $f_0(x) - f_0(y) = 1 - x - (1-y) = y - x$.

c) On a $\tau_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \tau_{n,p,\varepsilon} = \sum_{p=0}^{n-1} \tau_{n,p,\varepsilon}$ et donc τ_n est un entier relatif de même parité que n (comme somme de n entiers égaux à 1 ou -1). Il est alors clair que la suite (τ_n) diverge.

2) Il résulte du point précédent que $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ n'a pas de limite quand h tend vers 0 : f n'est pas dérivable en x_0.