Préparation au CAPES de mathématiques

Géométrie
Feuille d'exercices N°1

Exercice n°1 (D'après la $2^{\text{ème}}$ épreuve de 1972)
On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni des trois distances d_1, d_2, d_3 définies, pour tous les points $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$, par $d_1(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$, $d_2(x, y) = \mid x_1 - y_1 \mid + \mid x_2 - y_2 \mid$ et $d_3(x, y) = sup\{\mid x_1 - y_1 \mid, \mid x_2 - y_2 \mid\}$. Représenter $\mathcal{C}(O, 1) = \{M,\ d(O, M) = 1\}$ pour chacune des distances d_i.
Même question pour $d_4(x, y) = \displaystyle\int_0^1 |(x_1 - y_1) + t(x_2 - y_2)|\ dt$.

Exercice n°2
On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de la norme ℓ_∞, et de la distance associée d définie pour tous points $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ par $d(x, y) = sup\{\mid x_1 - y_1 \mid, \mid x_2 - y_2 \mid\}$. Soient $a = (1, 0)$ et $b = (-1, 0)$. Déterminer et dessiner l'ensemble médiateur des points a et b pour cette distance, pour être convaincu que ce n'est pas une droite (les points $(0, 0), (2, 3)$ et $(1, 2)$ font partie de cet ensemble).

Exercice n°3
On munit $\mathbb{R}$ de la distance discrète d définie par $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$ et $d(x, y) = 0$ sinon. Vérifier que d est bien une distance et caractériser les isométries (applications conservant la distance) de $(\mathbb{R}, d)$.

Exercice n°4
Soient E un espace métrique compact et f une isométrie de E. Montrer que f est une bijection.

Exercice n°5 (D'après la $2^{\text{ème}}$ épreuve de 1982)
(E, d) désignant un espace métrique et A une partie non vide de E, on appelle *expansion* de (A, d) toute application f de A dans A telle que :

$$\forall M, M' \in A,\ d(M, M') \leq d(f(M), f(M'))$$

1) Montrer que toute expansion est injective.

2) Montrer que l'ensemble des expansions de (A, d) est stable par composition.

3) Soit f une expansion bijective de (A, d). Montrer que f est une isométrie de (A, d) si et seulement si f^{-1} est une expansion de (A, d).
Soient A et B deux points de E (espace affine euclidien) et $\mathcal{A}$ le segment $[A, B]$.

4) Soit f une expansion de $(\mathcal{A}, d)$. Déterminer la paire $\{f(A), f(B)\}$.

5) En composant au besoin f avec une isométrie de $(\mathcal{A}, d)$, montrer que l'on peut se ramener au cas où $f(A) = A$ et $f(B) = B$. Déterminer alors f.

6) Déterminer l'ensemble des expansions de $(\mathcal{A}, d)$.

Exercice n°6
Soient a et b deux points d'un espace affine euclidien E. Montrer qu'un point m est dans le segment $[a, b]$ si et seulement si $d(a, b) = d(a, m) + d(m, b)$.
Montrer de même que m est le milieu du segment $[a, b]$ si et seulement si : $d(a, b) = d(a, m) + d(m, b)$ et $d(a, m) = d(m, b)$.

Exercice n°7

1) Soit E un espace vectoriel euclidien.

a) Soit $f : E \to E$ une application qui conserve le produit scalaire. Montrer que f est linéaire.

b) Montrer qu'une application linéaire $f : E \to E$ est une isométrie si et seulement si elle conserve la norme.

c) Soit $f : E \to E$ une isométrie qui laisse 0 fixe. Montrer que f est linéaire.

d) Montrer que les isométries de E sont les applications $g : E \to E$ du type $t \circ f$ où t est une translation et f un endomorphisme orthogonal.

2) Soit X un espace affine euclidien d'espace vectoriel associé E.

a) Montrer que toute isométrie $f : X \to X$ est une application affine.

b) Soit $f : X \to X$ une application affine. Montrer que f est une isométrie si et seulement si son application linéaire associée $\overrightarrow{f}$ est une isométrie.

c) Montrer que toute symétrie orthogonale de X *(et en particulier toute réflexion)* est une isométrie.

Exercice n°8

Soit X un espace affine euclidien. Déterminer toutes les isométries involutives de X.

Exercice n°9

Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit f une isométrie linéaire de E (i.e. un élément de $\mathcal{O}(E)$) qui commute avec toutes les autres isométries linéaires.
Montrer que f préserve toutes les droites de E. En déduire la nature de f.

Exercice n°10 (Isométries du plan affine euclidien)

Soient X un plan affine euclidien et f une isométrie de X. On rappelle que par définition, une rotation est une composée de deux réflexions dont les axes sont soit confondus, soit sécants en un point.

1) Montrer que s'il existe trois points a, b et c *non alignés* fixés par f ($i.e$ $f(a) = a$, $f(b) = b$ et $f(c) = c$), alors f est l'identité.

2) Montrer que si f fixe deux points distincts o et a alors f est soit l'identité soit la réflexion d'axe (oa).

3) Soit o un point de X. Montrer que l'ensemble des isométries qui laissent o invariant est réunion de l'ensemble des réflexions dont l'axe passe par o et des rotations qui laissent o invariant.

4) Montrer que toute isométrie du plan est composée d'au plus trois réflexions.

5) Montrer que l'ensemble $Is(X)$ des isométries de X est un groupe et que pour tout point o de X, l'ensemble $Is_o(X)$ des isométries de X fixant o est un sous-groupe de $Is(X)$.

Exercice n°11

Soit X un plan affine euclidien. On note $\mathcal{R}_o$ l'ensemble des rotations laissant o invariant.

1) Montrer que toute rotation de X *distincte de l'identité* a un point fixe et un seul (appelé centre de la rotation).

2) Soient $u = \overrightarrow{oa}$ et $v = \overrightarrow{ob}$ deux éléments de $\overrightarrow{X}$ non nuls tels que $\|u\| = \|v\|$. Montrer qu'il existe une rotation et une seule r de $\mathcal{R}_o$ telle que $r(a) = b$.

3) Soit r une rotation de $\mathcal{R}_o$. Pour toute réflexion s de $Is_0(X)$, montrer qu'il existe une réflexion s_1 de $Is_0(X)$ telle que $r = s_1 \circ s$ et qu'il existe une réflexion s_2 de $Is_0(X)$ telle que $r = s \circ s_2$.

4) Montrer que la composée d'un nombre impair de réflexions de $Is_o(X)$ est encore une réflexion.

5) Montrer que $\mathcal{R}_o$ est un sous-groupe commutatif de $Is_0(X)$.