Licence deuxième année

Module B03
Feuille d'exercices N°6

Groupes finis

Exercice n°1

Déterminer les sous-groupes de $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$, de $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$, de $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$. Dans chacun de ces trois ensembles, trouver les groupes multiplicatifs.

Exercice n°2

Déterminer les sous-groupes du groupe G formé des racines sixièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$. Ce groupe est-il isomorphe à $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$?

Exercice n°3

Dans $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{C})$ on considère les matrices suivantes :

$$J = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

On note $G = \{I_2, -I_2, J, -J, K, -K, L, -L\}$; montrer que G est un groupe pour la multiplication des matrices. Faire la liste des sous-groupes de G. Chercher des isomorphismes avec d'autres groupes.

Exercice n°4

Soient $(G, \times)$ un groupe fini et $a, b \in G$. Montrer que :

1) a, a^{-1} et bab^{-1} ont le même ordre.

2) ab et ba ont le même ordre.

Exercice n°5

Montrer que les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ forment un groupe cyclique.

Exercice n°6

Trouver tous les entiers $x \in \mathbb{Z}$ tels que $x^2 - 3x + 2 \equiv 0$ modulo 5. Trouver tous les entiers $x \in \mathbb{Z}$ tels que $x^2 - 3x + 2 = 0$ modulo 6.

Exercice n°7

1) Montrer que l'application $f : \mathbb{Z}/26\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/26\mathbb{Z}$ définie par $f(\bar{x}) = \bar{3}\bar{x} + \bar{9}$ est une bijection. Exprimer la bijection réciproque f^{-1}.

2) L'application $g : \mathbb{Z}/26\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/26\mathbb{Z}$ définie par $g(\bar{x}) = \bar{4}\bar{x} + \bar{3}$ est-elle injective ? surjective ?

Exercice n°8

Résoudre les équations suivantes :

1) $x^2 + x + \bar{6} = \bar{0}$ dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$.

2) $x^2 - 3x + \bar{4} = \bar{0}$ dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

3) $x^2 + 2x - \bar{3} = \bar{0}$ dans $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$.

4) $x^2 + 6x + \bar{9} = \bar{0}$ dans $\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$ et dans $\mathbb{Z}/101\mathbb{Z}$.

5) $x^2 - x - \bar{2} = \bar{0}$ et $x^2 + 3x + \bar{3} = \bar{0}$ et $x^2 + x + \bar{1} = \bar{0}$ dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

6) $x^2 + px + \bar{q} = \bar{0}$ dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Exercice n°9

Soient x, y, z trois entiers.

1) Démontrer la proposition suivante : $x^3 + y^3 + z^3 \equiv 0 \ [3] \Rightarrow x + y + z \equiv 0 \ [3]$.

2) On se propose de démontrer la proposition suivante $x^3+y^3+z^3 \equiv 0[9] \Rightarrow ((x \equiv 0[3]$ ou $y \equiv 0[3]$ ou $z \equiv 0[3]))$.

(a) déterminer pour tout n, la classe de n^3 modulo 9 selon la classe de n modulo 3.

(b) en déduire par contraposition la proposition.

Exercice n°10

Montrer que dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, les éléments inversibles pour la multiplication forment un groupe ; on le note U_n et on l'appelle le groupe des unités de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
Déterminer U_{14} ; quelle est sa structure ? Montrer que les éléments de U_{14} sont des générateurs du groupe cyclique $(\mathbb{Z}/14\mathbb{Z}, +)$ et que ce sont les seuls générateurs de ce groupe.

Exercice n°11

Dans $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$, on note U_{15} le groupe formé par les éléments inversibles pour la multiplication.

1) Déterminer les éléments de U_{15} et calculer l'ordre de chacun.

2) Le groupe $(U_{15}, \times)$ est-il cyclique ?

3) Résoudre dans $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2 + x + 1 = 0$.

Exercice n°12

Montrer qu'il n'existe qu'une structure de groupe de cardinal 3 et deux structures de groupe de cardinal 4.

Exercice n°13

Soit $n > 1$ un entier. Montrer que les générateurs de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ sont les classes des entiers premiers avec n.

Exercice n°14

Soit $n > 1$ un entier naturel.

1) Montrer que si $\sigma, \sigma' \in \mathcal{S}_n$ sont des permutations à supports disjoints alors $\sigma\sigma' = \sigma'\sigma$.

2) Soit $k \in \{2, \cdots, n\}$. Montrer que tout k-cycle de $\mathcal{S}_n$ est d'ordre k.

3) Soit $\sigma \in \mathcal{S}_8$ définie par $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 1 & 7 & 8 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Écrire σ comme produit de deux permutations circulaires.

b) Calculer σ^{2005}.

Exercice n°15

Décomposer la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 1 & 7 & 8 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ de $\sigma \in \mathcal{S}_8$ en un produit de transpositions. Cette décomposition est-elle unique ?