Licence deuxième année

Module B03
Feuille d'exercices N°3

Applications

Exercice n°1

Déterminer toutes les applications h de $E = \{0, 1, 2\}$ dans lui-même telles que pour tout x et tout y de E, on ait $h(x + y) = h(x) + h(y)$.

Exercice n°2

Déterminer toutes les applications h de $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ dans lui-même telles que pour tout x de E, on ait $h \circ h(x) = 2$.

Exercice n°3

On définit deux fonctions f et g sur $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 - x & \text{si } x \in [0, 1/2[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1/2[\\ x - 1/2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$. Ces applications sont-elles égales ?

Exercice n°4

On définit deux fonctions f et g sur $[0, 1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \in [0, 1/3[\\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 2/3[\\ 3x - 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$. Ces applications sont-elles égales ? Trouver un sous-ensemble de $[0, 1]$ sur lequel $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes restrictions.

Exercice n°5

Soient F un ensemble, E un sous-ensemble de F et f l'injection canonique de E dans F ($f(x) = x$ pour tout x de E). A quelle condition existe-t-il une application h de F dans E telle que $f \circ h = Id_F$?

Exercice n°6

Soient A un sous-ensemble d'un ensemble E et f la fonction caractéristique de A définie par $f(x) = 0$ si $x \notin A$ et $f(x) = 1$ si $x \in A$.
A quelle condition existe-t-il une application g de $F = \{0, 1\}$ dans E telle que $g \circ f = Id_E$?

Exercice n°7

Soient f, g et h les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout réel x, $f(x) = |x|$, $g(x) = -x$ et $h(x) = 0$ si x est négatif et $h(x) = -x$ sinon.
Combien d'applications distinctes peut-on former en composant des applications égales à f, g ou h ?

Exercice n°8

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = [1/(n + 1), 1/n[$. Calculer $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$ et montrer que la famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ forme une partition de E.

Exercice n°9

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = [1/n, 1 - 1/n[$. Calculer $\bigcup_{n \geq 2} A_n$ et $\bigcap_{n \geq 2} A_n$.

Exercice n°10

Soient a et b deux nombres rationnels et f l'application de l'ensemble des nombres rationnels dans lui-même qui à chaque rationnel x associe $f(x) = a\,x + b$. Cette application est-elle injective, surjective ?

Exercice n°11

Soient E et F deux ensembles et f l'application de E dans F qui à x associe x^2. Dire si f est injective ou surjective dans les cas suivants :

1) $E = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ et $F = \{0, 1, 4\}$.

2) $E = \{0, 1, 2\}$ et $F = \{0, 1, 4\}$.

3) $E = F = \mathbb{R}$.

4) $E = \mathbb{R}^+$ et $F = \mathbb{R}^+$.

Exercice n°12

Soient $E = \{0, 1, 2\}$ et $F = \{0, 1, 2, 3\}$. Combien existe-t-il d'applications de E dans F qui soient surjectives ? injectives ? Même question pour les applications de F dans E.

Exercice n°13

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $]-1, 1[$ définie par$f(x) = x/(1 + |x|)$. Montrer que f est bien définie, qu'elle est bijective et déterminer sa fonction réciproque f^{-1}.

Exercice n°14

Soit f l'application $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto 1 + z^2$

1) Montrer que f est surjective.

2) L'application f est-elle injective ?

3) Déterminer l'image $f(\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}$ par l'application f.

Exercice n°15

Soit f l'application de $\mathbb{Z}$ dans lui-même définie par $f(x) = x^2 - x$.

1) Montrer que f n'est pas injective.

- **a)** Calculer les valeurs de $f(n)/2$ pour $n \in \{n \in \mathbb{N}^* \mid n \leq 6\}$. Que remarquez-vous ?
- **b)** Montrer que la restriction de f à $\mathbb{N}^*$ est injective.

2) Soit h l'application de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ définie par $h(x, y) = f(x) + f(y)$ pour tout (x, y) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

- **a)** Montrer que l'image de h est un sous-ensemble de l'ensemble $2\mathbb{Z}$ des entiers pairs. L'application h est-elle surjective?
- **b)** La restriction de h à $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ est-elle injective ?

Exercice n°16

Soit $f : E = \mathbb{C} \backslash \{-i, i\} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \dfrac{z}{1 + z^2}$.

1) f est-elle surjective ? f est-elle injective ?

2) Déterminer l'image $f(\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}$ par l'application f.

Exercice n°17

Soit $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{2x+5}{x-1}$.

1) Montrer que f est surjective. f est-elle injective ?

2) Montrer qu'il existe un sous-ensemble F de $\mathbb{R}$ et une bijection g de $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ dans F tels que pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ on ait $f(x) = g(x)$. Déterminer g^{-1}.

Exercice n°18

Soient A et B deux parties non vides d'un ensemble E et f l'application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ définie par $f(X) = (A \cap X, B \cap X)$. Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur A et B pour que f soit injective, surjective, bijective. Expliciter f^{-1} lorsque f est bijective.

Exercice n°19

Soient f une application de E dans F, g une application de F dans G et $h = g \circ f$.

1) Montrer que si h est injective, f l'est aussi et que si h est surjective, g l'est aussi.

2) Montrer que si h est surjective et g injective, alors f est surjective.

3) Montrer que si h est injective et f surjective alors g est injective.

Exercice n°20

Soit f une application de E dans F.

1) Soient A_1 et A_2 deux parties de E. Montrer que

$$(A_1 \subset A_2) \Longrightarrow (f(A_1) \subset f(A_2))$$

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$$

$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2) \text{ avec égalité si } f \text{ est injective}$$

2) Soient B_1 et B_2 deux parties de F. Montrer que

$$(B_1 \subset B_2) \Longrightarrow \left(f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)\right)$$

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$$

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$

3) Soient A une partie de E et B une partie de F. Montrer que

$$A \subset f^{-1}(f(A)) \text{ avec égalité si } f \text{ est injective}$$

$$f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B \text{ avec égalité si } f \text{ est surjective}$$

Exercice n°21

Soient A et B deux ensembles non vides et f une application de A dans B. Montrer que :

1) si f est injective alors on peut construire une application surjective g de B dans A telle que $g \circ f = Id_A$.

2) si f est surjective alors on peut construire une application injective h de B dans A telle que $f \circ h = Id_B$.

Exercice n°22

Soient E, F, G trois ensembles non vides et f une application de F dans G. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications de E dans F.

1) Montrer que f est injective si et seulement si :

$$\forall g \in \mathcal{F}, \forall h \in \mathcal{F}, (f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h)$$

2) Trouver une application f de F dans G telle que

$$\forall g \in \mathcal{F}, \forall h \in \mathcal{F}, f \circ g = f \circ h$$

Exercice n°23

Soient E un ensemble, B un sous-ensemble de E et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles de E.

1) Montrer que $(\bigcup\limits_{i \in I} A_i) \cap B = \bigcup\limits_{i \in I}(A_i \cap B)$ et $(\bigcap\limits_{i \in I} A_i) \cup B = \bigcap\limits_{i \in I}(A_i \cup B)$.

2) En déduire que si $(B_j)_{j \in J}$ est une autre famille de sous-ensembles de E alors on a :
$(\bigcup\limits_{i \in I} A_i) \cap (\bigcup\limits_{j \in J} B_j) = \bigcup\limits_{(i,j) \in I \times J} (A_i \cap B_j)$ et $(\bigcap\limits_{i \in I} A_i) \cup (\bigcap\limits_{j \in J} B_j) = \bigcap\limits_{(i,j) \in I \times J} (A_i \cup B_j)$.

Exercice n°24

Soient E un ensemble, et f et g deux applications de E dans E.
On définit une application $h : E \to A,\ x \mapsto (f(x), g(x))$.

1) Montrer que si f ou g est injective alors h est injective.

2) Soit H un ensemble. On suppose dorénavant que $E = \mathcal{P}(H)$. Pour tout A de E, on définit l'application $f_A : E \longrightarrow E,\ X \longmapsto A \cap X$.

a) Montrer que f_A est injective si et seulement si $A = H$.

b) Soit $\{A, B\}$ une partition de H. On définit l'application $h_{A,B} : E \longrightarrow E \times E,\ X \longmapsto (f_A(X), f_B(X))$.
Montrer que $h_{A,B}$ est injective. Qu'en déduit-on pour la question 1) ?
L'application $h_{A,B}$ est-elle surjective ?
Soit (Y_1, Y_2) dans $E \times E$. Déterminer $h_{A,B}^{-1}\{(Y_1, Y_2)\}$.

Exercice n°25

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même définie par $f((x, y)) = (x + y, xy)$ pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$.

1) Calculer $f^{-1}(\{(3, 2)\})$. f est-elle injective ?

2) f est-elle surjective ? Déterminer son image.

Exercice n°26

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + x - 2$.

1) Donner la définition de $f^{-1}(\{4\})$. Calculer $f^{-1}(\{4\})$.

2) f est-elle injective ? f est-elle surjective ?

3) Donner la définition de $f([-1, 1])$. Calculer $f([-1, 1])$.

4) Donner la définition de $f^{-1}([-2, 4])$. Calculer $f^{-1}([-2, 4])$