Licence deuxième année

Module B03
Feuille d'exercices N°2

Ensembles

Exercice n°1

Soient $E = \mathbb{C}, A = \{z \in E \mid |z| \leq 1\}$ et $B = \{z \in E \mid \mathrm{Re}(z) < 1\}$.
Représenter $\mathcal{C}_E A, \mathcal{C}_E B, A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A$ et $A \Delta B$.

Exercice n°2

Soient A, B et C des sous-ensembles d'un ensemble E. Les égalités suivantes sont-elles toujours vraies ?(Sinon, donner un contre-exemple)

1) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$

2) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$

Exercice n°3

Soient A, B, C et D des sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer les égalités
$A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$ et $A \Delta B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$.

Exercice n°4

Soient A, B et C des sous-ensembles d'un ensemble E.

1) Simplifier $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) \cup (A \cup B)^c \cup C$.

2) Simplifier $(A \setminus (B^c \cup C)) \cup A^c \cup B^c \cup C$.

Exercice n°5

Soient A, B, C et D des sous-ensembles d'un ensemble E.

1) Montrer que l'on a $((A \cap B) \cup B^c = A \cup B^c)$ et $((A \setminus B) \cup B = A \cup B)$.

2) En déduire que l'on a $E = (C \setminus D) \cup (A \cap B \cap C^c) \cup A^c \cup B^c \cup D$.

Exercice n°6

Léon et Nicole travaillent dans un centre de lexicographie. Ils disposent de trois dictionnaires A, B et C. Leur patron donne à Léon le travail suivant : former d'abord une liste des mots communs aux dictionnaires A et B, former ensuite une liste de mots communs aux dictionnaires B et C, enfin chercher les mots qui figurent dans l'une ou l'autre liste, mais pas dans les deux à la fois. Léon demande à Nicole de l'aider en dressant une liste des mots figurant dans le dictionnaire A ou dans le dictionnaire C, mais pas dans les deux à la fois. Ensuite Léon se charge de trouver les mots communs à cette liste et au dictionnaire B.

Le patron obtiendra-t-il le résultat demandé ?

Exercice n°7

Soient E et F deux ensembles, A et B deux sous-ensembles de E et C et D deux sous-ensembles de F. Les égalités suivantes sont-elles toujours vraies ?

1) $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$.

2) $(A \times C) \setminus (B \times C) = (A \setminus B) \times C$.

3) $(A \times C)\Delta(B \times C) = (A\Delta B) \times C$.

Exercice n°8

Soient E et F deux ensembles. Un sous-ensemble X de $E \times F$ est-il toujours de la forme $A \times B$ où A appartient à $\mathcal{P}(E)$ et B appartient à $\mathcal{P}(F)$?

Exercice n°9

On suppose que les sous-ensembles A_1, A_2, A_3 et A_4 forment une partition de l'ensemble E. Combien y-a-t-il de façons de former une partition de E avec des sous-ensembles qui sont des réunions de certains des A_i?

Exercice n°10

Représenter les complémentaires de A et B dans E, ainsi que $A \cap B$, $A \cup B$, $A\backslash B$, $B\backslash A$ et $A\Delta B$ lorsque :

1) $E = \mathbb{R}$, $A = \{x \in E,\ x^2 + 2x - 1 < 0\}$ et $B = \mathbb{Z}$.

2) $E = \mathbb{R}^2$, $A = \{(x, y) \in E,\ x^2 + y^2 - 1 < 0\}$ et $B = \{(x, y) \in E,\ x^2 + y^2 + 2x < 0\}$.

3) E est le plan euclidien muni d'un repère orthonormé, A la droite d'équation $y = 2x + 3$ et B la droite d'équation $4x - 2y = 0$.

Exercice n°11

Soient E un ensemble non vide et A, B et C trois sous-ensembles de E.
Dans quel cas a-t-on $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$?

Exercice n°12

Soient A, B et C des sous-ensembles d'un ensemble E. Les égalités suivantes sont-elles toujours vraies ? (Sinon, donner un contre-exemple.)

$$A\backslash(B \cup C) = (A\backslash B) \cup (A\backslash C) \qquad\qquad A \cup (B\Delta C) = (A \cup B)\Delta(A \cup C)$$

Exercice n°13

Soient A, B et C des sous-ensembles d'un ensemble E. On suppose que $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$. Montrer que B est un sous-ensemble de C.

Exercice n°14

Soient A, B, C des sous-ensembles d'un ensemble E. Simplifier les expressions suivantes :

1) $(A \cup B) \cap (A^c \cup B) \cap (A \cup B^c) \cap (A^c \cup B^c)$ où A^c est le complémentaire de A dans E.

2) $(A \cap B) \cup (A^c \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B^c)$

3) $[(A^c \cup C^c) \cap (B^c \cup C^c)] \cup [(A \cup B) \cap C]$

Exercice n°15

Soient A, B, C et D des sous-ensembles d'un ensemble E.
Montrer les égalités $(A\backslash B) \cap (C\backslash D) = (A \cap C)\backslash(B \cup D)$ et $E = (A\Delta B) \cup (A\Delta B^c)$.

Exercice n°16

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer que $(A\backslash B)\Delta(A^c \cap B^c) = B^c$.

Exercice n°17

Montrer que si A, B et C sont des sous-ensembles d'un ensemble E, on a :

1) $(A\Delta B)\Delta C = (A\cap B\cap C)\cup(A\cap B^c\cap C^c)\cup(A^c\cap B\cap C^c)\cup(A^c\cap B^c\cap C)$

2) $A\cap(B\Delta C) = (A\cap B^c\cap C)\cup(A\cap B\cap C^c)$

Exercice n°18

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.

1) On suppose $B\subset A$. Déterminer tous les sous-ensembles X de E tels que $A\cap X = B$.

2) Que se passe-t-il si l'on supprime l'hypothèse $B\subset A$?

3) Étudier de même les sous-ensembles Y de E tels que $A\cup Y = B$.

Exercice n°19

On appelle fonction caractéristique d'une partie A d'un ensemble E, l'application e_A de E dans $\{0,1\}$ définie par $e_A(x)=0$ si $x\notin A$ et $e_A(x)=1$ si $x\in A$.
Soient A, B et C des sous-ensembles de E.

1) Montrer que $A=B$ si et seulement si $e_A=e_B$.

2) Exprimer les fonctions caractéristiques de A^c, $A\cap B$, $A\cup B$, $A\backslash B$ et $A\Delta B$ en fonction de e_A et e_B.
Retrouver ainsi l'égalité $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$.

3) Donner, en fonction de e_A, e_B et e_C, une condition nécessaire et suffisante pour que A, B et C forment une partition de E.

Exercice n°20

Soient A et B deux ensembles. Les égalités suivantes sont-elles toujours vraies ? (Sinon, trouver un contre-exemple.)

1) $\mathcal{P}(A\cup B)=\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)$.

2) $\mathcal{P}A\Delta B)=\mathcal{P}(A)\Delta\mathcal{P}(B)$.

Exercice n°21

1) Montrer que $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$.

2) Donner tous les éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}\emptyset)))$.

Exercice n°22

Soient E un ensemble non vide et A_1, A_2, A_3 trois sous-ensembles de E. On suppose que ces sous-ensembles vérifient les conditions suivantes :
P_1 : $A_1\neq E \quad A_2\neq E \quad A_3\neq E$
P_2 : $A_1\cup A_2 = A_1\cup A_3 = A_2\cup A_3 = E$
P_3 : $A_1\cap A_2\cap A_3=\emptyset$
Montrer que la famille $\{A_1^c,\ A_2^c,\ A_3^c\}$ forme une partition de l'ensemble E.

Exercice n°23

Soient E et F deux ensembles, A et B deux sous-ensembles de E, et C et D deux sous-ensembles de F. Les égalités suivantes sont-elles toujours vraies ? (Sinon, donner un contre-exemple.)

1) $(A\times C)\cup(B\times C)=(A\cup B)\times C$.

2) $(A\cup B)\times(C\cup D)=(A\times C)\cup(B\times D)$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°24}}$

Soient E et F deux ensembles, A un sous-ensemble de E et D un sous-ensemble de F.

1) En fonction de A, D, du complémentaire de A dans E et du complémentaire de D dans F, déterminer le complémentaire de $A \times D$ dans $E \times F$.

2) Quand a-t-on $(E \times F)\backslash(A \times D) = (E\backslash A) \times (F\backslash D)$?

3) Dans quels cas les ensembles $A \times D$, $A \times (F\backslash D)$, $(E\backslash A) \times D$, $(E\backslash A) \times (F\backslash D)$ forment-ils une partition de E ?

$\boxed{\textbf{Exercice n°25}}$

Soient A, B et C des sous-ensembles d'un ensemble E.

1) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les ensembles $A\backslash B$, $B\backslash C$, A^c et C forment une partition de E.

2) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les ensembles $A^c \cap B^c$, C^c, $A \cap C$ et $B \cap C$ forment une partition de E.

$\boxed{\textbf{Exercice n°26}}$

Soient E un ensemble non vide et A, B, C trois sous-ensembles de E.

1) On suppose que $A \cup B \cup C = (A\backslash B) \cup (B\backslash C) \cup (C\backslash A)$. Montrer, en utilisant un raisonnement par l'absurde, que $A \cap B \cap C = \emptyset$.

2) Montrer l'équivalence

$$A \cup B \cup C = (A\backslash B) \cup (B\backslash C) \cup (C\backslash A) \Longleftrightarrow A \cap B \cap C = \emptyset$$

3) On suppose que $A \cap B \cap C = \emptyset$, $(A\backslash B) \neq \emptyset$, $(B\backslash C) \neq \emptyset$ et $(C\backslash A) \neq \emptyset$. Montrer que $(A\backslash B)$,$(B\backslash C)$ et $(C\backslash A)$ forment une partition de E.