Licence deuxième année

Module B03
Feuille d'exercices N°1

Calcul propositionnel - Quantificateurs

Exercice n°1

Écrire avec des quantificateurs les propriétés suivantes :

1) Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $+\infty$.

2) Si tout élément x d'un ensemble E est un élément de l'ensemble F, E est inclus dans F.

Exercice n°2

Soient x et y deux réels, écrire la négation des propositions suivantes :

1) $0 < x \leq 1$ **2)** $xy = 0$ **3)** $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$

Exercice n°3

Soient E un ensemble et $\mathbf{P}(x)$ une proposition qui contient une variable x, x désignant un élément de E. Écrire avec des quantificateurs une proposition qui signifie "il y a au plus un x tel que $\mathbf{P}(x)$"et une proposition qui signifie "il y a exactement deux x tels que $\mathbf{P}(x)$".

Exercice n°4

La proposition suivante est-elle vraie ? Écrire sa négation.

$$\forall x \in \mathbb{Z},\ \forall y \in \mathbb{Z},\ \exists z \in \mathbb{Z},\ \exists u \in \mathbb{Z},\ \exists v \in \mathbb{Z},\ (x = zu \textit{ et } y = zv)$$

Exercice n°5

Soient f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ?

1) $(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)g(x) = 0) \Longleftrightarrow [(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0) \textit{ ou } (\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 0)]$.

2) $(\forall x \in \mathbb{R},\ f^2(x) + g^2(x) = 0) \Longleftrightarrow [(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0) \textit{ et } (\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 0)]$.

Exercice n°6

Indiquer si chacune des propositions suivantes est vraie lorsque $E = \mathbb{N}$ puis $E = \mathbb{Z}$.

1) $\forall x \in E,\ \exists y \in E,\ y < x$ **2)** $\exists y \in E,\ \forall x \in E,\ y < x$ **3)** $\forall x \in E,\ \exists y \in E,\ y + x = 0$

Exercice n°7

Pour tous réels x et y, on note $P(x, y)$ la proposition "$x + y^2 = 0$". Les propositions suivantes sont-elles vraies ?

1) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ P(x, y)$ **2)** $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ P(x, y)$ **3)** $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ P(x, y)$

4) $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ P(x, y)$ **5)** $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ P(x, y)$.

Exercice n°8

Écrire avec des quantificateurs les propriétés suivantes :

1) La fonction f est bornée sur $\mathbb{R}$.

2) La fonction f est majorée sur $\mathbb{R}$.

3) La suite (u_n) prend des valeurs positives ou négatives aussi grandes que l'on veut.

Exercice n°9

Écrire avec des quantificateurs les propriétés suivantes :

1) On peut trouver au moins un rationnel compris entre $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.

2) Il n'existe pas d'entier naturel supérieur à tous les autres.

3) Si la somme de deux entiers naturels est nulle alors ces deux entiers sont nuls.

Exercice n°10

Donner la négation des propositions suivantes :

1) $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, (|x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon)$ **2)** $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| < M$

Exercice n°11

Les propositions suivantes sont-elles vraies ? Sinon, donner leur négation.

1) $\exists A \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{n} \leq A$ **2)** $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exists n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{1}{n} < x$

Exercice n°12

Indiquer si les propositions suivantes sont vraies lorsque $E = \mathbb{N}^*$ puis $E = \mathbb{Q}^*$ et $E = \mathbb{R}^*$.

1) $\forall x \in E, \exists y \in E, xy = 1$ **2)** $\exists x \in E, \forall y \in E, xy = 1$

Exercice n°13

Les propositions suivantes sont-elles vraies lorsque $E = \mathbb{Z}$? lorsque $E = \mathbb{Q}$? Écrire leurs négations.

1) $\forall x \in E, \exists y \in E, (x = 0 \text{ ou } xy = 1)$

2) $\forall x, y \in E, \exists z \in E, ((x < y \text{ et } x < z \text{ et } z < y) \text{ ou } y \leq x)$

3) $\forall x \in E, ((\exists y \in E, y^2 < x) \Rightarrow (\exists z \in E, x = z^2))$

Exercice n°14

Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on note $C(x, y)$ la propriété "$y^2 + xy - x - 1 = 0$". Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Expliciter la négation des affirmations fausses.

1) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, C(x, y)$ **2)** $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, C(x, y)$ **3)** $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, C(x, y)$
4) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, C(x, y)$

Exercice n°15

Si $(x, y) \in \mathbb{N}^{*2}$, on note $P(x, y)$ la propriété "x divise y". Écrire la propriété $P(x, y)$ ainsi que sa négation à l'aide de quantificateurs. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Expliciter la négation des affirmations fausses.

1) $\forall x \in \mathbb{N}^*, \exists y \in \mathbb{N}^*, P(x, y)$ **2)** $\exists y \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{N}^*, P(x, y)$ **3)** $\exists x \in \mathbb{N}^*, \forall y \in \mathbb{N}^*, P(x, y)$