Algèbre et Arithmétique 2

Examen de juin 2016

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Justifiez toutes vos réponses. Les exercices sont entièrement indépendants. Le barème est donné à titre indicatif. ***Durée : 2 heures.***

Questions de cours *(3 points)*

$\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif.

1) Énoncer le théorème de division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.

2) Démontrer le lemme de Gauss : si A, B et C sont des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ avec A et B premiers entre eux et si A divise le produit BC alors A divise C.

Exercice n°1 *(3,5 points)*

On considère le polynôme $P = X^4 - 7X^2 + 4X + 20$ de $\mathbb{R}[X]$. On rappelle que $17^2 = 289$.

1) Effectuer la division euclidienne de P par P' (P' désignant le polynôme dérivé de P) et trouver les racines du reste R de cette division.

2) En déduire que -2 est racine au moins double de P. Justifier que la multiplicité de -2 comme racine de P est exactement 2.

3) Donner la décomposition en produit de polynômes irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice n°2 *(5 points)*

Soient m et n deux entiers naturels non nuls.

1) Déterminer le reste de la division euclidienne de $X^{2m} + (X+1)^n - 1$ par $X(X+1)$.

Dans la suite, A désigne un polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ et on pose $B(X) = [A(X)]^{2m} + (A(X)+1)^n - 1$.

2) Montrer que $[A(X)]^2 + A(X)$ divise $B(X)$.

3) Montrer que si x_0 est une racine de multiplicité 1 de A alors x_0 est une racine de multiplicité 1 de B.

4) On suppose que $A = X^2 + 1$, $m = 1$ et $n = 3$. Donner la décomposition en facteurs irréductibles de B dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice n°3 *(3,5 points)*

On considère le polynôme $P = X^3 + 2X^2 + 2X + 3$ de $\mathbb{C}[X]$ dont on note a, b et c les racines complexes.

1) Calculer les quantités $s_1 = a^2 + b^2 + c^2$, $s_2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$ et $s_3 = a^2b^2c^2$.

2) Trouver un polynôme de degré trois dont les racines sont a^2, b^2 et c^2.

Exercice n°4 *(5 points)*

On considère dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle : $F = \dfrac{X^2+1}{(X-3)^3(X^2-6X+10)}$.

1) Donner dans $\mathbb{R}(X)$ la décomposition théorique en éléments simples de F.

2) Calculer tous les coefficients intervenant dans cette décomposition.

3) Quelle est la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{C}(X)$?