Université de Rennes 1
UFR de Mathématiques

Juin 2015

Algèbre et Arithmétique 2

Session de rattrapage (Durée : 2 heures)
Calculatrices et documents prohibés.

Le sujet comporte six exercices indépendants, vous devez en choisir cinq. Le barème est indicatif.
La clarté de la rédaction et la propreté de la présentation seront prises en compte.

Exercice 1 (5 points)
On considère l'anneau des polynômes à coefficients réels de la variable X : $\mathbb{R}[X]$.
Soit $Q_0(X)$ l'élément suivant : $Q_0(X) = X^2 - 3X + 2$.

1) (0,5 point) Le polynôme $Q_0(X)$ est il un élément irréductible.
2) (2 points) Soit $< Q_0(X) >$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}[X]$ formé par les polynômes multiples de $Q_0(X)$.
   Montrer que cet ensemble forme un idéal de $\mathbb{R}[X]$.
3) (1,5 points) Soit l'anneau quotient $\mathbb{R}[X] \ / < Q_0(X) >$.
   Décrire la forme des éléments de cet anneau.
   Quelle est l'image du polynôme $P(X) = X^3 + X^2 + X + 5$ dans cet anneau quotient ?
4) (1 point) On considère les deux éléments $\overline{X-2}$ et $\overline{X-1}$ de $\mathbb{R}[X] \ / < Q_0(X) >$.
   Quel est le produit de ces deux éléments ?

Exercice 2 (5 points)
Le but de cet exercice est de démontrer que tout polynôme de degré trois à coefficients dans $\mathbb{Z}$ irréductible, c'est à dire ne pouvant s'écrire comme produit de deux polynômes non constants, reste irréductible dans $\mathbb{Q}$.
Pour cela, soient $P(X) = p_0 + p_1X + p_2X^2 + p_3X^3$ un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$, $A(X)$ et $B(X)$ deux polynômes de $\mathbb{Q}[X]$ tels que : $P(X) = A(X) \times B(X)$.

1) (0,5 point) Quels sont les degrés possibles pour $A(X)$ et $B(X)$?
2) (0,5 point) Montrer qu'il existe un entier n_0 et deux polynômes $\hat{A}(X)$ et $\hat{B}(X)$ de $\mathbb{Z}[X]$ tel que : $n \times P(X) = \hat{A}(X) \times \hat{B}(X)$.
3) (2 points) On peut supposer sans perte de généralité (pourquoi ?) que : $\hat{A}(X) = a_0 + a_1X$ et $\hat{B}(X) = b_0 + b_1X + b_2X^2$. Soit p_0 un diviseur premier de n_0, montrer que soit p_0 divise tous les coefficients de $\hat{A}(X)$, soit tous les coefficients de $\hat{B}(X)$.
4) (2 points) Conclure.

Exercice 3 (5 points)
Déterminer dans $\mathbb{R}[X]$ un polynôme $P(X)$ de degré 6 tel que $(X-1)^3$ divise $P(X)+1$ et X^4 divise $P(X)+2$.

Exercice 4 (5,5 points)
On considère dans $\mathbb{R}[X]$ l'équation d'inconnues P et Q suivante :

$$\text{pgcd}^2(P,Q) + (X-1) \quad \text{ppcm}(P,Q) = X(X^2 - X + 1)$$

1) (1,5 points) On suppose que le pgcd(P,Q) est unitaire.
   Déterminer toutes les expressions possibles pour ce dernier.
2) (4 points) Pour chaque valeur possible du pgcd, trouver toutes les solutions de cette équation.

Exercice 5 (2,5 points)
On considère dans $\mathbb{C}[X]$ deux polynômes P et Q premiers entre eux. On suppose que α est une racine double du polynôme $(P(X))^2 + (Q(X))^2$.
Montrer que α est une racine de $(P^{'}(X))^2 + (Q^{'}(X))^2$.

Exercice 6 (4 points)
On considére dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle suivante :

$$\frac{1}{X^2(X^2+1)}$$

1) (1 point) Donner dans $\mathbb{R}(X)$ la décomposition théorique en éléments simples de cette fraction.
2) (3 points) Calculer tous les coefficients intervenant dans cette décomposition.