Chapitre 4

Fractions rationnelles - Décomposition en éléments simples

4.1 Fractions rationnelles

Dans tout le paragraphe, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif (dans la pratique $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

4.1.1 Construction des fractions

Relation d'équivalence

Sur l'ensemble des couples (A, B) de $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$, on définit la relation $\sim$ par $(A, B) \sim (C, D)$ si $AD = BC$.

Proposition 4.1. *$\sim$ est une relation d'équivalence.*

Démonstration : Montrons que $\sim$ est une relation réflexive, symétrique et transitive.
• Pour $A \in \mathbb{K}[X]^*$, on a $A.A = A.A$ donc $(A, A) \sim (A, A)$. $\sim$ est réflexive.
• Soient (A, B) et (C, D) dans $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$. Supposons $(A, B) \sim (C, D)$. On a alors $AD = BC$ donc $CB = DA$. Par suite $(C, D) \sim (A, B)$. $\sim$ est bien symétrique.
• Soient (A_1, B_1), (A_2, B_2) et (A_3, B_3) dans $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$. Supposons $(A_1, B_1) \sim (A_2, B_2)$ et $(A_2, B_2) \sim (A_3, B_3)$. On a alors $A_1B_2 = B_1A_2$ et $A_2B_3 = B_2A_3$ et donc $A_1B_2A_2B_3 = B_1A_2B_2A_3$. Comme $B_2A_2 \neq 0$, la proposition 1.9 (intégrité de $\mathbb{K}[X]$) conduit à $A_1B_3 = B_1A_3$ soit $(A_1, B_1) \sim (A_3, B_3)$. $\sim$ est transitive. $\square$

Définition 4.2. *On appelle **fraction rationnelle** toute classe d'équivalence pour $\sim$. L'ensemble des fractions rationnelles est noté $\mathbb{K}(X)$.*

Notation. La classe d'équivalence de (A, B) est notée $F = \dfrac{A}{B}$ et on dit que $\dfrac{A}{B}$ est ***un représentant*** de F.

Remarque. On a donc par définition : $\quad \dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D} \iff AD = BC$

Exemple. $(3X^3 + 3X^2, X^3 + 3X^2 + 2X) \sim (3X, X + 2)$ donc $\dfrac{3X^3 + 3X^2}{X^3 + 3X^2 + 2X} = \dfrac{3X}{X + 2}$.

4.1.2 Opérations sur les fractions

Proposition et Définition 4.3. *Soient $\dfrac{A}{B}$ et $\dfrac{C}{D}$ deux éléments de $\mathbb{K}(X)$. La fraction rationnelle $\dfrac{AD + BC}{BD}$ est indépendante du choix des représentants de $\dfrac{A}{B}$ et $\dfrac{C}{D}$. On l'appelle **somme** des* *fractions* $\dfrac{A}{B}$ *et* $\dfrac{C}{D}$ *et on note* $\dfrac{A}{B}+\dfrac{C}{D}=\dfrac{AD+BC}{BD}$.

Démonstration : Supposons donc $\dfrac{A}{B}=\dfrac{A_1}{B_1}$ et $\dfrac{C}{D}=\dfrac{C_1}{D_1}$. On a donc $AB_1=BA_1$ et $CD_1=DC_1$. On veut montrer que $\dfrac{A_1D_1+B_1C_1}{B_1D_1}=\dfrac{AD+BC}{BD}$. Or $(A_1D_1+B_1C_1)BD=A_1BDD_1+DC_1BB_1$ donc $(A_1D_1+B_1C_1)BD=AB_1DD_1+D_1CBB_1=B_1D_1(AD+BC)$. Le résultat en découle. □

Proposition et Définition 4.4. *Soient* $\dfrac{A}{B}$ *et* $\dfrac{C}{D}$ *deux éléments de* $\mathbb{K}(X)$*. La fraction* $\dfrac{AC}{BD}$ *est indépendante du choix des représentants de* $\dfrac{A}{B}$ *et* $\dfrac{C}{D}$.
On l'appelle ***produit*** *des fractions* $\dfrac{A}{B}$ *et* $\dfrac{C}{D}$ *et on note* $\dfrac{A}{B}.\dfrac{C}{D}=\dfrac{AC}{BD}$.

Démonstration : Supposons donc $\dfrac{A}{B}=\dfrac{A_1}{B_1}$ et $\dfrac{C}{D}=\dfrac{C_1}{D_1}$. On a donc $AB_1=BA_1$ et $CD_1=DC_1$. On cherche à montrer que $\dfrac{A_1C_1}{B_1D_1}=\dfrac{AC}{BD}$. Or on a $A_1C_1BD=A_1BC_1D=AB_1CD_1$ donc $A_1C_1BD=ACB_1D_1$. Le résultat en découle. □

Théorème 4.5. $(\mathbb{K}(X),+,\times)$ *est un corps commutatif.*

Démonstration : La vérification de toutes les propriétés caractérisant un corps commutatif est simple et méthodique mais lourde. Elle est donc laissée à titre d'exercice. On remarquera juste ici que :

- le neutre pour l'addition est $\dfrac{0}{1}$ et sera noté simplement 0.
- le neutre pour la multiplication est $\dfrac{1}{1}$ et sera noté simplement 1. L'inverse de la fraction rationnelle non nulle $\dfrac{A}{B}$ est la fraction $\dfrac{B}{A}$. □

Proposition 4.6. *L'application* $\varphi:\mathbb{K}[X]\longrightarrow\mathbb{K}(X),\ A\longmapsto\dfrac{A}{1}$ *vérifie :*

- $\forall(A,B)\in\mathbb{K}[X]^2,\ \varphi(A+B)=\varphi(A)+\varphi(B)$ *et* $\varphi(A.B)=\varphi(A).\varphi(B)$
- $\varphi\left(1_{\mathbb{K}[X]}\right)=1_{\mathbb{K}(X)}$

On dit que φ *est un* ***morphisme d'anneaux (unitaires)****. L'application* φ *est de plus injective (on identifiera donc dorénavant le polynôme* A *et la fraction rationnelle* $\dfrac{A}{1}$.

Démonstration : Cela résulte de manière immédiate des définitions des opérations (addition et multiplication) dans $\mathbb{K}(X)$. □

4.1.3 Forme réduite - Pôles - Zéros

Toute fraction rationnelle admet au moins un représentant irréductible (A_0,B_0) (c'est à dire tel que A_0 et B_0 soient premiers entre eux).
On peut choisir un représentant privilégié : une fraction rationnelle F est dite sous ***forme réduite*** ou encore sous ***forme irréductible*** quand elle est écrite $F=\dfrac{A}{B}$, où A et B sont des polynômes premiers entre eux et B est unitaire.

Proposition 4.7. *Une fraction rationnelle a une unique forme réduite. Si* $F=\dfrac{A}{B}$ *on trouve sa forme réduite en calculant un pgcd* D *de* A *et* B*, en en déduisant (par « simplification » par* D*) un représentant irréductible* $\dfrac{A_0}{B_0}$*, et en simplifiant finalement par le coefficient dominant de* B_0.

Démonstration : Le procédé de construction décrit dans la proposition assure l'existence de la forme réduite. Montrons-en l'unicité. Supposons donc $F = \dfrac{A}{B} = \dfrac{A_1}{B_1}$ avec $\mathrm{pgcd}(A, B) = 1$, $\mathrm{pgcd}(A_1, B_1) = 1$ et B et B_1 unitaires. On a alors $AB_1 = A_1B$ et B_1 divise A_1B et est premier avec A_1. Le lemme de Gauss entraîne alors que B_1 divise B. De même, B divise AB_1 et est premier avec A donc B divise B_1. Il s'ensuit l'existence d'une constante c dans $\mathbb{K}$ telle que $B = cB_1$. B et B_1 étant unitaires, on a finalement $B = B_1$ et par suite aussi $A = A_1$. □

Définitions 4.8. *Soit $F = \dfrac{A}{B}$ une fraction écrite sous forme irréductible. On appelle* ***pôle*** *de F toute racine de B. On dit que a est un* ***pôle d'ordre*** *n de F si a est une racine de multiplicité n de B ; si $n = 1$, on dit que a est un* ***pôle simple*** *de F.*

On appelle ***zéro*** *de F (dans $\mathbb{K}$) toute racine de A (dans $\mathbb{K}$). La multiplicité du zéro est sa multiplicité en tant que racine de A.*

Remarque. Une fraction rationnelle de $\mathbb{K}(X)$ a un nombre fini de pôles. Une fraction rationnelle non nulle a un nombre fini de zéros.

Exemple. Soit $F(X) = \dfrac{X^2 - 3X + 2}{X^4 - 1}$. F n'est pas sous forme irréductible, car on a :
$F(X) = \dfrac{(X-1)(X-2)}{(X-1)(X+1)(X^2+1)} = \dfrac{X-2}{(X+1)(X-i)(X+i)}$.
Les pôles de F dans $\mathbb{C}$ sont donc -1, i et $-i$ (ils sont tous simples). 2 est l'unique zéro de F.

4.2 Décomposition en éléments simples

4.2.1 Partie entière d'une fraction rationnelle

Proposition et Définition 4.9. *Soit $F = \dfrac{A}{B}$ une fraction rationnelle. Il existe un unique polynôme E et un unique polynôme A_1 tels que $\dfrac{A}{B} = E + \dfrac{A_1}{B}$ et $\deg(A_1) < \deg(B)$.*
Le polynôme E est indépendant du choix du représentant de F et est appelé ***partie entière*** *de la fraction F et noté $\mathscr{E}(F)$.*

Démonstration : L'écriture $\dfrac{A}{B} = E + \dfrac{A_1}{B}$ est équivalente à $A = BE + A_1$ et donc E et A_1 sont respectivement le quotient et le reste dans la division euclidienne de A par B.
D'autre part, si $\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D}$ alors $AD = BC$ et, en supposant $\dfrac{C}{D} = E_1 + \dfrac{C_1}{D}$ avec $\deg(C_1) < \deg(D)$, $BC = BDE_1 + BC_1$. L'égalité $AD = BC$ conduit alors à $BD(E_1 - E) = A_1D - BC_1$ avec $\deg(A_1D) < \deg(BD)$ et $\deg(C_1B) < \deg(BD)$. On en déduit $E_1 - E = 0$ soit $E_1 = E$. □

Exemple. La division euclidienne de $A = 2X^4 + 3X^3 - X + 1$ par $B = X^2 - 3X + 1$ s'écrit :
$2X^4 + 3X^3 - X + 1 = (X^2 - 3X + 1)(2X^2 + 9X + 25) + 65X - 24$, on a donc :
$$\frac{2X^4 + 3X^3 - X + 1}{X^2 - 3X + 1} = 2X^2 + 9X + 25 + \frac{65X - 24}{X^2 - 3X + 1} \text{ soit } \mathscr{E}\left(\frac{2X^4 + 3X^3 - X + 1}{X^2 - 3X + 1}\right) = 2X^2 + 9X + 25$$

Remarques.

- Il est clair que : $\mathscr{E}(\frac{A}{B}) = 0 \iff \deg(A) < \deg(B)$
- On a $A = BE + A_1$ et donc, si $\dfrac{A}{B}$ est irréductible, on peut écrire $AU + BV = 1$ (théorème de Bezout) donc $A_1U + B(V + EU) = 1$ et par suite $\dfrac{A_1}{B}$ est encore irréductible.

Proposition 4.10. *Soient F et G deux fractions rationnelles. On a :* $\mathscr{E}(F+G) = \mathscr{E}(F)+\mathscr{E}(G)$.

Démonstration : Supposons que $F = \dfrac{A}{B}$ et $G = \dfrac{C}{D}$. Par la définition précédente, on peut écrire $F = \mathscr{E}(F) + \dfrac{A_1}{B}$ et $G = \mathscr{E}(G) + \dfrac{C_1}{D}$ avec $\deg(A_1) < \deg(B)$ et $\deg(C_1) < \deg(D)$. Mais alors $F+G = \mathscr{E}(F)+\mathscr{E}(G)+\dfrac{A_1D + BC_1}{BD}$ avec $\deg(A_1D) < \deg(BD)$ et $\deg(C_1B) < \deg(BD)$. On en déduit $\deg(A_1D+BC_1) < \deg(BD)$ et donc (par unicité de l'écriture) $\mathscr{E}(F+G) = \mathscr{E}(F)+\mathscr{E}(G)$. □

4.2.2 Théorème de décomposition

Lemme 4.11. *Soient A, B, B_1, B_2 des polynômes tels que :*

- *la fraction rationnelle $\dfrac{A}{B}$ est de partie entière nulle,*
- *B_1 et B_2 sont premiers entre eux et $B = B_1B_2$.*

Alors il existe des polynômes uniques A_1 et A_2 tels que $\dfrac{A}{B} = \dfrac{A_1}{B_1} + \dfrac{A_2}{B_2}$ avec $\deg(A_1) < \deg(B_1)$ et $\deg(A_2) < \deg(B_2)$.

Si de plus $\dfrac{A}{B}$ est irréductible, alors les deux fractions $\dfrac{A_1}{B_1}$ et $\dfrac{A_2}{B_2}$ sont irréductibles.

Démonstration :
Unicité : Supposons que l'on ait $\dfrac{A}{B} = \dfrac{A_1}{B_1} + \dfrac{A_2}{B_2}$ et $\dfrac{A}{B} = \dfrac{C_1}{B_1} + \dfrac{C_2}{B_2}$. Alors $\dfrac{A_1 - C_1}{B_1} = \dfrac{C_2 - A_2}{B_2}$ et donc $B_2(A_1-C_1) = B_1(C_2-A_2)$. B_1 divise alors $B_2(A_1-C_1)$ et est premier avec B_2 donc d'après le lemme de Gauss B_1 divise $A_1 - C_1$: $A_1 - C_1 = QB_1$. Or par hypothèse, $\deg(A_1) < \deg(B_1)$ et $\deg(C_1) < \deg(B_1)$ donc $\deg(A_1 - C_1) < \deg(B_1)$ et par suite, $Q = 0$ et $A_1 - C_1 = 0$. On déduit immédiatement $A_2 = C_2$.
Existence : D'après le théorème de Bézout, il existe des polynômes U et V tels que :
$B_1U + B_2V = 1$ et donc $AB_1U + AB_2V = A$.
Or $B = B_1B_2$ donc $\dfrac{A}{B} = \dfrac{AB_1U + AB_2V}{B_1B_2} = \dfrac{A}{B_2}U + \dfrac{A}{B_1}V$.
Notons $E_1 = \mathscr{E}(\dfrac{AV}{B_1})$ et $E_2 = \mathscr{E}(\dfrac{AU}{B_2})$. On a alors $\dfrac{AV}{B_1} = E_1 + \dfrac{A_1}{B_1}$ et $\dfrac{AU}{B_2} = E_2 + \dfrac{A_2}{B_2}$ avec $\mathscr{E}(\dfrac{A_1}{B_1}) = \mathscr{E}(\dfrac{A_2}{B_2}) = 0$. Mais alors $\dfrac{A}{B} = E_1 + E_2 + \dfrac{A_1}{B_1} + \dfrac{A_2}{B_2}$ et $\mathscr{E}(\dfrac{A}{B}) = E_1 + E_2 = 0$ donc $E_1 + E_2 = 0$ et $\dfrac{A}{B} = \dfrac{A_1}{B_1} + \dfrac{A_2}{B_2}$.
Cas où la fraction est irréductible. A et B sont alors premiers entre eux et d'après le théorème de Bézout on peut écrire $AU' + BV' = 1$ soit $AU' + B_1B_2V' = 1$. B_1 est donc premier avec A or on a B_1 premier avec V donc B_1 est premier avec AV et par suite $\dfrac{AV}{B_1}$ est irréductible. De même, B_2 est premier avec A et avec U donc avec AU et par suite $\dfrac{AU}{B_2}$ est irréductible. On en déduit donc que $\dfrac{A_1}{B_1}$ et $\dfrac{A_2}{B_2}$ sont irréductibles. □

Exemple.
$$\frac{6X^3 - 21X^2 + 9X - 21}{(X-1)^3(X^2+X+1)} = \frac{-2X^2 + 8X - 15}{(X-1)^3} + \frac{2X+6}{X^2+X+1}$$

Lemme 4.12. *Soient A, B, A_1, A_2, ..., A_n des polynômes tels que la fraction rationnelle $\dfrac{A}{B}$ est de partie entière nulle, $B_1, B_2, \cdots, B_n$ sont premiers entre eux deux à deux et $B = B_1B_2\cdots B_n$.*

Alors il existe des polynômes A_1, A_2, ..., A_n tels que

$$\frac{A}{B} = \frac{A_1}{B_1} + \cdots + \frac{A_n}{B_n}, \quad \textit{avec } \deg(A_1) < \deg(B_1), \cdots, \deg(A_n) < \deg(B_n)$$

et cette écriture est unique. De plus, si $\frac{A}{B}$ est irréductible alors toutes les fractions obtenues sont irréductibles.

Démonstration :

Unicité : Par récurrence. Le résultat est établi pour $n = 2$. Supposons le vrai lorsque B est un produit de $n-1$ facteurs (où $n \geqslant 3$) et soit $B = B_1 B_2 \cdots B_n$. Supposons que l'on ait deux décompositions : $\frac{A}{B} = \frac{A_1}{B_1} + \cdots + \frac{A_n}{B_n}$ et $\frac{A}{B} = \frac{C_1}{B_1} + \cdots + \frac{C_n}{B_n}$ avec toutes les fractions écrites de partie entière nulle. Posons alors $F = \frac{A_1 B_2 + A_2 B_1}{B_1 B_2}$ et $G = \frac{C_1 B_2 + C_2 B_1}{B_1 B_2}$. F et G sont de partie entière nulle et $B = (B_1 B_2) B_3 \cdots B_n$ est le produit de $n-1$ polynômes deux à deux premiers entre eux. Par hypothèse de récurrence on a donc : $A_n = C_n, \cdots, A_3 = C_3$ et $F = G$. Ce dernier résultat se traduit par $\frac{A_1}{B_1} + \frac{A_2}{B_2} = \frac{C_1}{B_1} + \frac{C_2}{B_2}$ et donc $A_1 = C_1$ et $A_2 = C_2$ d'après le lemme 4.11.

Existence : Par récurrence. Le résultat est établi pour $n = 2$. Supposons le vrai lorsque B est un produit de $n-1$ facteurs (où $n \geqslant 3$) et soit $B = B_1 B_2 \cdots B_n$. $B = (B_1 B_2) B_3 \cdots B_n$ est le produit de $n-1$ polynômes deux à deux premiers entre eux donc par hypothèse de récurrence on a

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{B_1 B_2} + \frac{A_3}{B_3} + \cdots + \frac{A_n}{B_n} \quad (1)$$

D'où, d'après le lemme 4.11 :

$$\frac{A}{B} = \frac{A_1}{B_1} + \frac{A_2}{B_2} + \frac{A_3}{B_3} + \cdots + \frac{A_n}{B_n} \quad (2)$$

où toutes les fractions écrites ont une partie entière nulle.

Cas où la fraction est irréductible : Par récurrence. Le résultat est établi pour $n = 2$. Supposons le vrai lorsque B est un produit de $n-1$ facteurs et soit $B = B_1 B_2 \cdots B_n$. Dans les égalités (1) et (2) du raisonnement précédent, le lemme 1 et l'hypothèse de récurrence assurent que toutes les fractions sont irréductibles. $\square$

Exemple. $$\frac{15X^4 - 13X^3 + 2X^2 - X + 3}{(X-1)^3 (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)^2} = \frac{X^2 + 1}{(X-1)^3} + \frac{-1}{X^2 + X + 1} + \frac{-X^3 - 7X - 1}{(X^2 - X + 1)^2}$$

Lemme 4.13. *Toute fraction rationnelle $\frac{A}{B^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ de partie entière nulle peut se mettre d'une façon et d'une seule sous la forme : $\frac{A}{B^n} = \frac{A_1}{B} + \frac{A_2}{B^2} + \cdots + \frac{A_n}{B^n}$ avec $\deg(A_i) < \deg(B)$. Si de plus $\frac{A}{B^n}$ est irréductible alors $A_n \neq 0$.*

Démonstration :

Unicité : Par récurrence. Le résultat est clair pour $n = 1$. Supposons le vrai pour $n-1$ (où $n \geqslant 2$) et supposons alors que l'on ait deux décompositions : $\frac{A}{B^n} = \frac{A_1}{B} + \cdots + \frac{A_n}{B^n}$ et $\frac{A}{B^n} = \frac{C_1}{B} + \cdots + \frac{C_n}{B^n}$. A_n et C_n sont alors le reste dans la division euclidienne de A par B et donc $A_n = B_n$. Mais on a alors $\frac{A_1}{B} + \cdots + \frac{A_{n-1}}{B^{n-1}} = \frac{C_1}{B} + \cdots + \frac{C_{n-1}}{B^{n-1}}$ et l'hypothèse de récurrence permet de conclure.

Existence : Par récurrence. Le résultat est clair pour $n = 1$. Supposons le vrai pour $n-1$ (où $n \geqslant 2$). La division euclidienne de A par B permet d'écrire $A = BQ + R$ avec $\deg(R) < \deg(B)$ donc $\dfrac{A}{B^n} = \dfrac{Q}{B^{n-1}} + \dfrac{R}{B^n}$. L'hypothèse de récurrence permet alors de conclure pourvu que que $\dfrac{Q}{B^{n-1}}$ soit de partie entière nulle. Or ce dernier point est clair si $Q = 0$ et si $Q \neq 0$ alors $\deg(A) = \deg(BQ) = \deg(B) + \deg(Q)$. Or $\deg(A) < \deg(B^n) = n\deg(B)$ donc $\deg(Q) < (n-1)\deg(B) = \deg(B^{n-1})$ et par suite, $\mathscr{E}(\dfrac{Q}{B^{n-1}}) = 0$.

Cas où $\dfrac{A}{B^n}$ est irréductible : Si on avait $A_n = 0$ on pourrait écrire $\dfrac{A}{B^n} = \dfrac{Q}{A^{n-1}}$ et par suite $\dfrac{A}{B^n}$ ne serait pas irréductible. □

Exemple. $\dfrac{3X^4 + 7X^3 + 11X^2}{(X^2+X+1)^3} = \dfrac{-8X-4}{X^2+X+1} + \dfrac{X+1}{(X^2+X+1)^2} + \dfrac{3}{(X^2+X+1)^3}$

Théorème 4.14. *Pour toute fraction rationnelle $\dfrac{A}{B}$ de $\mathbb{K}(X)$ dont le dénominateur admet la décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{K}$: $B = B_1^{\alpha_1} B_2^{\alpha_2} \cdots B_k^{\alpha_k}$ (où $B_1, B_2, \cdots, B_k$ sont des polynômes irréductibles de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux distincts, et α_1, α_2, $\cdots$, α_k des entiers strictement positifs), il existe un unique système de polynômes*
E, A_{1,i_1} $(1 \leqslant i_1 \leqslant \alpha_1)$, A_{2,i_2} $(1 \leqslant i_2 \leqslant \alpha_2), \cdots, A_{k,i_k}$ $(1 \leqslant i_k \leqslant \alpha_k)$ de $\mathbb{K}[X]$ vérifiant les conditions :

- $\dfrac{A}{B} = E + \dfrac{A_{1,1}}{B_1} + \dfrac{A_{1,2}}{B_1^2} + \cdots + \dfrac{A_{1,\alpha_1}}{B_1^{\alpha_1}} + \dfrac{A_{2,1}}{B_2} + \dfrac{A_{2,2}}{B_2^2} + \cdots + \dfrac{A_{2,\alpha_2}}{B_2^{\alpha_2}} + \cdots + \dfrac{A_{k,\alpha_k}}{B_k^{\alpha_k}}$
- $\forall i \in [\![1,k]\!]$, $\forall j \in [\![1,\alpha_i]\!]$, $\deg(A_{i,j}) < \deg(B_i)$
- *E est la partie entière de $\dfrac{A}{B}$.*

La démonstration résulte des trois lemmes précédents. L'écriture précédente se nomme la ***décomposition en éléments simples*** de la fraction rationnelle $\dfrac{A}{B}$. Les $\dfrac{A_{1,1}}{B_1}$,....,$\dfrac{A_{k,\alpha_k}}{B_k^{\alpha_k}}$ sont les ***éléments simples***. Si le dénominateur est une puissance d'un polynôme de degré 1, on parle d'éléments de ***première espèce***; si c'est une puissance d'un polynôme de degré 2, on parle d'élément de ***deuxième espèce***.

4.2.3 Pratique de la décomposition dans $\mathbb{C}$(X)

Soit $\dfrac{A}{B}$ une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{C}$. Dans $\mathbb{C}[X]$ tous les polynômes sont scindés et B s'écrivant sous la forme $B = k(X-a)^\alpha (X-b)^\beta ... (X-l)^\lambda$, on a la décomposition théorique

$$\frac{A}{B} = E + \frac{a_1}{X-a} + \frac{a_2}{(X-a)^2} + .. + \frac{a_\alpha}{(X-a)^\alpha} + \frac{b_1}{X-b} + ... + \frac{l_\lambda}{(X-l)^\lambda}$$

(il n'y a que des éléments de première espèce).
La décomposition s'effectue donc de la manière suivante :

— Première étape : déterminer la partie entière de la fraction.
— Deuxième étape : décomposer si nécessaire le dénominateur en facteurs irréductibles, écrire la forme de la décomposition, puis déterminer les coefficients.

Exemple 1 : $F = \dfrac{X^4+1}{X^3-1}$

La partie entière de F est X et $X^3-1 = (X-1)(X-j)(X-j^2)$ donc F se décompose sous la forme $F = X + \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{X-j} + \dfrac{c}{X-j^2}$ où a, b et c sont trois constantes complexes.

• On multiplie F par $(X-1)$ (on obtient alors $\dfrac{X^4+1}{(X-j)(X-j^2)} = X(X-1) + a + \left(\dfrac{b}{X-j} + \dfrac{c}{X-j^2}\right)(X-1))$ puis on évalue en 1 (on pose $X=1$). On trouve ainsi $a = \dfrac{2}{3}$;

• De même on multiplie par $(X-j)$ puis on évalue en j. Cela donne $b = -\dfrac{1}{3}$,

• En écrivant $F = \overline{F}$, l'unicité de la décomposition entraîne $a = \bar{a}$, $b = \bar{c}$ et $c = \bar{b}$. On a donc $c = \bar{b} = -\dfrac{1}{3}$.

D'où la décomposition de F : $F = X + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{X-1} - \dfrac{1}{X-j} - \dfrac{1}{X-j^2}\right)$.

Exemple 2 : $G = \dfrac{4}{(X^2-1)^2}$

La décomposition théorique est $G = \dfrac{a}{X+1} + \dfrac{b}{(X+1)^2} + \dfrac{c}{X-1} + \dfrac{d}{(X-1)^2}$.

• La parité de B donne (par unicité de la décomposition) $a = -c$ et $b = d$.

• On multiplie par $(X-1)^2$ puis on évalue en 1 pour obtenir $d = 1$.

• On évalue en 0 pour obtenir $4 = a + b - c + d = 2a + 2b$. On en déduit $b = 1$.

D'où $G = \dfrac{1}{X+1} + \dfrac{1}{(X+1)^2} - \dfrac{1}{X-1} + \dfrac{1}{(X-1)^2}$.

Exemple 3 : $H = \dfrac{X+1}{(X-1)^3(X-2)}$

La décomposition théorique est $H = \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{(X-1)^2} + \dfrac{c}{(X-1)^3} + \dfrac{d}{X-2}$.

On pose $Y = X-1$; on a : $C(X) = \dfrac{Y+2}{Y^3(Y-1)}$ puis on effectue la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 2 de $2+Y$ par $-1+Y$.

Celle-ci s'écrit : $2 + Y = (-1+Y)(-2-3Y-3Y^2) + 3Y^3$.

Donc $H = \dfrac{(-1+Y)(-2-3Y-3Y^2)+3Y^3}{Y^3(Y-1)}$ on obtient donc :

$H = \dfrac{-3}{X-1} + \dfrac{-3}{(X-1)^2} + \dfrac{-2}{(X-1)^3} + \dfrac{3}{(X-2)}$.

4.2.4 Pratique de la décomposition dans $\mathbb{R}(X)$

Toutes les méthodes vues précédemment s'appliquent encore dans le cas d'une décomposition sur $\mathbb{R}$. Mais il apparait cette fois ci dans la décomposition théorique des éléments simples de deuxième espèce du type $\dfrac{rX+s}{(X^2+pX+q)^n}$ $(p^2 - 4q < 0)$.

Il y a donc ici une autre étape, consistant à déterminer les coefficients r et s ci-dessus.

Exemple 1 : $F = \dfrac{X^3+1}{X(X-1)(X^2+1)^2}$.

La décomposition théorique est $F = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X-1} + \dfrac{cX+d}{X^2+1} + \dfrac{eX+f}{(X^2+1)^2}$ où $(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{R}^4$.

• On multiplie F par $(X^2+1)^2$ puis on évalue en i. On obtient $e = 1$ et $f = 0$.

• On fait passer le terme connu dans le premier membre et on simplifie. On obtient une fraction dont le dénominateur est $X(X-1)(X^2+1)$: $\dfrac{1}{X(X-1)(X^2+1)} = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X-1} + \dfrac{cX+d}{X^2+1}$.

On multiplie alors par X^2+1 et on évalue en i pour obtenir $c = \frac{1}{2}$ et $d = -\frac{1}{2}$,
• On multiplie les deux membres de l'égalité par X puis :
  • on évalue en 0 pour obtenir $a = -1$,
  • on fait tendre X vers $+\infty$. On en déduit $0 = a + b + c$

Finalement, on obtient donc : $F = \dfrac{-1}{X} + \dfrac{1}{2(X-1)} + \dfrac{X-1}{2(X^2+1)} + \dfrac{X}{(X^2+1)^2}$.

Exemple 2 : $G = \dfrac{X+1}{X^4+1}$

La décomposition théorique est $G = \dfrac{aX+b}{X^2+\sqrt{2}X+1} + \dfrac{cX+d}{X^2-\sqrt{2}X+1}$. Les racines complexes des dénominateurs étant compliquées, on procède par identification pour obtenir :
$a = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$, $b = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{4}$, $c = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ et $d = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Exemple 3 : $H = \dfrac{2X^7+X^6-X^3+3}{(X^2+X+1)^3} = \dfrac{A}{B^3}$.

On effectue la division euclidienne de A par B, puis du quotient par B et on réitère l'opération.
$H = 2X - 5 + \dfrac{3X+10}{X^2+X+1} + \dfrac{-7X-5}{(X^2+X+1)^2} + \dfrac{2X+3}{(X^2+X+1)^3}$.

4.2.5 Récapitulatif des méthodes utilisées

Pour décomposer sur $\mathbb{R}$ une fraction rationnelle irréductible, de partie entière nulle, on peut :
- Si a est un pôle d'ordre k de la fraction, multiplier par $(X-a)^k$ et remplacer X par a.
- Multiplier par (X^2+pX+q) et remplacer X par une racine complexe du trinôme (X^2+pX+q).
- Des considérations de parité donnent des relations entre certains coefficients.
- Faire passer certains termes connus dans l'autre membre et réduire.
- Méthode des divisions euclidiennes successives.
- Pour un pôle a d'ordre k supérieur ou égal à 3, on peut poser $Y = X - a$, la fraction est donc de la forme $\dfrac{A(Y)}{Y^k B(Y)}$, avec A et B deux polynômes dont 0 n'est pas racine, et effectuer la division suivant les puissances croissantes de A par B à l'ordre $k-1$.
- Remplacer X par un réel ou un complexe fixé.
- Faire tendre X vers l'infini (limite), après avoir éventuellement multiplié par un facteur approprié.

L'emploi des méthodes suivantes est également possible, mais fortement déconseillé :
- Faire la décomposition sur $\mathbb{C}$ et regrouper les termes conjugués.
- Méthode des coefficients indéterminés (pôles compliqués) : il est toujours possible d'identifier les coefficients de la décomposition théorique en réduisant au même dénominateur...

4.2.6 Primitives de fractions rationnelles

Les fractions rationnelles en x (quotients de deux polynômes) sont des fonctions dont on peut toujours calculer une primitive (en théorie du moins). L'outil fondamental est la décomposition en éléments simples, qui permet d'écrire une fraction rationnelle comme somme :
- d'un polynôme,
- d'éléments simples de première espèce du type $\dfrac{\lambda}{(x-a)^n}$,
- d'éléments simples de deuxième espèce du type $\dfrac{\lambda x + \mu}{\left((x-a)^2+b^2\right)^n}$ avec $b \neq 0$.

Les primitives de polynômes sont faciles à calculer. De même pour les primitives d'éléments simples de première espèce puisque :

$$\int \frac{\lambda}{(x-a)^n}\,dx = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{1-n}\,\dfrac{1}{(x-a)^{n-1}} & \text{si } n \neq 1, \\ \lambda \ell n|x-a| & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

Pour les éléments simples de deuxième espèce, on écrit d'abord

$$\int \frac{\lambda x+\mu}{\left((x-a)^2+b^2\right)^n}\,dx = \frac{\lambda}{2}\int \frac{2(x-a)}{\left((x-a)^2+b^2\right)^n}\,dx + \frac{\lambda a+\mu}{b^{2n-1}}\int \frac{\frac{dx}{b}}{\left(\left(\frac{x-a}{b}\right)^2+1\right)^n}.$$

Pour la première primitive, on reconnaît la forme $\dfrac{u'}{u^n}$ et donc :

$$\int \frac{2(x-a)}{\left((x-a)^2+b^2\right)^n}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{1-n}\,\dfrac{1}{\left((x-a)^2+b^2\right)^{n-1}} & \text{si } n \neq 1, \\ \ell n\left((x-a)^2+b^2\right) & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

La deuxième primitive se ramène, par le changement de variable $t = (x-a)/b$, $dt = dx/b$, au calcul de $I_n(t) = \int \frac{dt}{(1+t^2)^n}$. On a $I_1(t) = \arctan t$, et $I_n(t)$ se calcule par récurrence sur n en utilisant une intégration par parties.

$$\begin{aligned} I_n(t) &= \int \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \frac{t}{(1+t^2)^n} - \int \frac{-2nt^2}{(1+t^2)^{n+1}}\,dt \\ &= \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2n\int \left(\frac{1}{(1+t^2)^n} - \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}\right)dt = \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1}, \end{aligned}$$

d'où $I_{n+1} = \frac{1}{2n}\left((2n-1)I_n + \frac{t}{(1+t^2)^n}\right)$. On sait donc calculer, en théorie, une primitive de n'importe quelle fraction rationnelle en x, en suivant le chemin ci-dessus.

Exemple : $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x^2-1)(x^2+1)^3}$.

On commence par effectuer le changement de variable $u = x^2$. Cela conduit à

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2-1)(x^2+1)^3} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{(u-1)(u+1)^3},$$

Le théorème de décomposition en éléments simples assure alors l'existence de $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$\frac{1}{(u-1)(u+1)^3} = \frac{a}{u-1} + \frac{b}{(u+1)^3} + \frac{c}{(u+1)^2} + \frac{d}{u+1}$$

En multipliant par $u-1$ et en évaluant en 1 on obtient $a = 1/8$. En multipliant par $(u+1)^3$ et en évaluant en -1 on obtient $b = -1/2$. En multipliant par u et en faisant tendre u vers $+\infty$ on obtient $d = -1/8$. En évaluant en 0 on trouve $c = -1/4$. Ainsi

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{(u-1)(u+1)^3} &= \frac{1}{8}\ell n|u-1| + \frac{1}{4(u+1)^2} + \frac{1}{4(u+1)} - \frac{1}{8}\ell n|u+1| \\ &= \frac{u+2}{4(u+1)^2} + \frac{1}{8}\ell n\left|\frac{u-1}{u+1}\right|, \end{aligned}$$

et

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2-1)(x^2+1)^3} = \frac{x^2+2}{8(x^2+1)^2} + \frac{1}{16}\ell n\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|.$$