

L1 - AR2 Arithmétique 2

CC2 - 12 Mars 2014 - Durée : 1h

Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés.

Le barème est à titre indicatif.

Exercice 1. (3 points.)

Ecrire le polynôme d'interpolation de Lagrange P tel que $P(-1) = 6$, $P(0) = 3$ et $P(3) = 6$, et le mettre sous la forme $aX^2 + bX + c$.

Exercice 2. (4 points.)

Déterminer les triplets $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{13}{15} \\ xyz = -15 \end{cases}$$
Exercice 3. (5 points.)

On pose $P = 2X^3 - X^2 + 3X - 2$.

1. Donner une majoration du module des racines de P .
2. La suite de Sturm de P est $(P, P_1, P_2, -\frac{3879}{578})$. Calculer P_1 et P_2 .
3. Combien P a-t-il de racines réelles ?

Exercice 4. (8 points.)

On pose $P = X^3 - X^2 - 2X$, $Q = X^4 + X^3 - 3X^2 - X + 2$ et $F = \frac{P}{Q}$.

1. Quelle est la multiplicité de 1 comme racine de Q ?
Quelle est la multiplicité de -1 comme racine de Q ?
Quelle est la racine de Q qui manque ?
En déduire la décomposition de Q en produit de facteurs irréductibles sur \mathbb{R} .
2. Déterminer le pgcd unitaire de P et Q .
3. Vérifier que $\frac{X(X-2)}{(X-1)^2(X+2)}$ est la forme réduite de F .
4. Donner les pôles et les zéros de F , avec leurs ordres de multiplicité.
5. Décomposer F en éléments simples sur \mathbb{R} .