

**L1 - AR2 Arithmétique 2**

CC2 - 12 Mars 2014 - Durée : 1h

Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés.

Le barème est à titre indicatif.

**Exercice 1.** (3 points.)

Ecrire le polynôme d'interpolation de Lagrange  $P$  tel que  $P(-1) = 6$ ,  $P(0) = 3$  et  $P(3) = 6$ , et le mettre sous la forme  $aX^2 + bX + c$ .

**Exercice 2.** (4 points.)

Déterminer les triplets  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  tels que :

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{13}{15} \\ xyz = -15 \end{cases}$$
**Exercice 3.** (5 points.)

On pose  $P = 2X^3 - X^2 + 3X - 2$ .

1. Donner une majoration du module des racines de  $P$ .
2. La suite de Sturm de  $P$  est  $(P, P_1, P_2, -\frac{3879}{578})$ . Calculer  $P_1$  et  $P_2$ .
3. Combien  $P$  a-t-il de racines réelles ?

**Exercice 4.** (8 points.)

On pose  $P = X^3 - X^2 - 2X$ ,  $Q = X^4 + X^3 - 3X^2 - X + 2$  et  $F = \frac{P}{Q}$ .

1. Quelle est la multiplicité de 1 comme racine de  $Q$  ?  
Quelle est la multiplicité de  $-1$  comme racine de  $Q$  ?  
Quelle est la racine de  $Q$  qui manque ?  
En déduire la décomposition de  $Q$  en produit de facteurs irréductibles sur  $\mathbb{R}$ .
2. Déterminer le pgcd unitaire de  $P$  et  $Q$ .
3. Vérifier que  $\frac{X(X-2)}{(X-1)^2(X+2)}$  est la forme réduite de  $F$ .
4. Donner les pôles et les zéros de  $F$ , avec leurs ordres de multiplicité.
5. Décomposer  $F$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$ .