Algèbre et Arithmétique 2

Contrôle continu du 10 mars 2017

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Justifiez toutes vos réponses. Les exercices sont entièrement indépendants. Le barème est donné à titre indicatif. Durée : 2 heures.

Questions de cours *(4,5 points)*

$\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif (par exemple $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1) Énoncer le théorème de Bézout (qui caractérise les polynômes premiers entre eux).

2) Démontrer le lemme de Gauss : si A, B et C sont des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ avec A et B premiers entre eux et si A divise le produit BC alors A divise C.

3) Démontrer que tout polynôme de degré 1 de $\mathbb{K}[X]$ est irréductible.

Exercice n°1 *(3 points)*

Soient a et b deux réels. On considère le polynôme $A = 4X^4 + aX^3 - 11X^2 + bX + 9$.
Pour quelles valeurs de a et b existe-t-il un polynôme B de $\mathbb{R}[X]$ tel que $A = B^2$?

Exercice n°2 *(5,5 points)*

1) Soit A un polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$ tel que : $A(X^2) = (X^3 + 1)A(X)$

a) Quel est le degré de A ?

b) Calculer $A(1)$ ainsi que $A'(0)$ et $A''(0)$.

c) Écrire la formule de Taylor pour A en 0.
En déduire l'existence d'un réel $a \neq 0$ tel que $A = a(X^3 - 1)$.

2) Trouver tous les polynômes A de $\mathbb{R}[X]$ tels que $A(X^2) = (X^3 + 1)A(X)$.

Exercice n°3 *(7 points)*

On considère les polynômes $A = 2X^4 + 2X^3 + 3X^2 + X + 1$ et $B = X^3 - 1$ de $\mathbb{R}[X]$.

1) Effectuer la division euclidienne de A par B.

2) Calculer le pgcd (unitaire) D de A et B et trouver deux polynômes U_0 et V_0 tels que $AU_0 + BV_0 = D$.

3) Déterminer les décompositions en facteurs irréductibles de A et B dans $\mathbb{R}[X]$ (on justifiera les réponses).

4) Déterminer un *ppcm* de A et B.

5) Trouver tous les polynômes U et V de $\mathbb{R}[X]$ tels que $AU + BV = D$.