Algèbre et Arithmétique 2

Corrigé rapide du contrôle continu du 10 mars 2016

Questions de cours

1) Supposons $AB = 0$ et $A \neq 0$. L'égalité $\deg(AB) = \deg(A) + \deg(B)$ entraîne alors $\deg(B) = -\infty$ et donc $B = 0$.

2) On dit que les polynômes A et B sont premiers entre eux si 1 est un pgcd de A et B, c'est à dire si les seuls diviseurs communs à A et B sont les polynômes constants non nuls.

3) Soit $D = \operatorname{pgcd}(A, B)$. $D|A$ donc $D|AU$ et de même $D|BV$. Par suite, $D|AU + BV = 1$ et $D = 1$ (puisque D est unitaire).

Exercice n°1

Si un tel polynôme Q existe, il est nécessairement de degré 2. Quitte à considérer $-Q$ (qui est alors solution), on peut même le supposer unitaire donc de la forme $Q = X^2+\alpha X+\beta$. Réciproquement, si Q est de cette forme alors $Q^2 = X^4 + 2\alpha X^3 + (\alpha^2 + 2\beta)X^2 + 2\alpha\beta X + \beta^2$ et donc $P = Q^2$ si et seulement si $\begin{cases} 2a &= 2\alpha \\ b &= \alpha^2 + 2\beta \\ -12 &= 2\alpha\beta \\ 4 &= \beta^2 \end{cases}$

ou encore $\begin{cases} \beta &= 2 \\ \alpha &= -3 \\ b &= 13 \\ a &= -3 \end{cases}$ ou $\begin{cases} \beta &= -2 \\ \alpha &= 3 \\ b &= 5 \\ a &= 3 \end{cases}$. Il y a donc deux couples (a, b) solutions : $(-3, 13)$ et $(3, 5)$.

Exercice n°2

En notant n le degré de P et a_n son coefficient dominant, le coefficient de X^n dans $X^2P'' - (X + 1)P' + P$ est $n(n-1)a_n - na_n + a_n = (n-1)^2 a_n$ donc ou bien $a_n = 0$ et $P = 0$ (qui est bien une solution), ou bien $n = 1$ et, en reportant dans l'équation, il vient alors $-a(X + 1) + P = 0$ soit $P = a(X + 1)$.

Exercice n°3

1)
a) La formule de Leibniz donne $[X^n(1-X)^n]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [X^n]^{(n-k)} [(1-X)^n]^{(k)}$ soit

$$[X^n(1-X)^n]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n.(n-1)\cdots(k+1)X^k(-1)^k n(n-1)\cdots(n-k+1)(1-X)^{n-k}$$

ou encore $[X^n(1-X)^n]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \frac{n!}{k!}.\frac{n!}{(n-k)!} X^k(1-X)^{n-k} = n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (-1)^k X^k(1-X)^{n-k}$

b) On a $(1-X)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-X)^k.(1)^{n-k}$ donc $X^n(1-X)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k X^{n+k}$. Comme la dérivation est linéaire, on en déduit $[X^n(1-X)^n]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \left[X^{n+k}\right]^{(n)}$ soit

$$[X^n(1-X)^n]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (n+k)(n+k-1)\cdots(k+1)X^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \frac{(n+k)!}{k!} X^k.$$

2) En identifiant les termes en X^n dans les deux expressions précédentes, on obtient :
$n!\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2(-1)^kX^k(-1)^{n-k}X^{n-k}=(-1)^n\dfrac{(2n)!}{n!}X^n$ soit $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\dfrac{(2n)!}{n!.n!}=\binom{2n}{n}$.

Exercice n°4

1) La division euclidienne de A par B s'écrit $A=(X+1).B+(-X^2-X-1)$. On poursuit alors l'algorithme de Euclide et on obtient $B=(-X+1)(-X^2-X-1)+(X+2)$ puis $-X^2-X-1=(-X+1)(X+2)-3$ et $X+2=(-3).(-\frac{1}{3}X-\frac{2}{3})+0$. Dans cet algorithme le dernier reste non nul (-3) est un *pgcd* de A et B. En particulier $\text{pgcd}(A,B)=1$. A et B sont donc premiers entre eux.

2) On obtient un couple de coefficients de Bezout en remontant l'algorithme précédent :
$-3=-X^2-X-1-(-X+1)(X+2)=-X^2-X-1-(-X+1)[B-(-X+1)(-X^2-X-1)]$ soit $-3=(X-1)B+(-X^2-X-1)(X^2-2X+2)$ et enfin $-3=(X-1)B+[A-(X+1).B](X^2-2X+2)$.
On peut donc choisir $U=-\dfrac{1}{3}(X^2-2X+2)$ et $V=-\dfrac{1}{3}(-X^3+X^2+X-3)$.

3) On a d'après 2), $AU_0+BV_0=1=AU+BV$ donc $A(U_0-U)=B.(V-V_0)$. A divise donc $B.(V-V_0)$. Or, d'après 1), A est premier avec B donc (lemme de Gauss) A divise $V-V_0$.

4) La question précédente montre que si (U,V) est un couple solution alors on peut écrire $V-V_0=AQ$ pour un certain polynôme Q et donc, en reportant dans la dernière égalité écrite, $A(U_0-U)=B.AQ$. Comme $A\neq 0$, on a $U_0-U=BQ$ soit $U=U_0-BQ$.
Réciproquement, pour tout polynôme Q, $A.(U_0-BQ)+B.(V_0+AQ)=A.U_0+B.V_0=1$.
En conclusion, l'ensemble des couples (U,V) cherchés est $\{(U_0-BQ,V_0+AQ),\ Q\in\mathbb{R}[X]\}$.