

Algèbre et Arithmétique 2

Contrôle continu du jeudi 5 mars 2015

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Justifiez toutes vos réponses. Les exercices sont entièrement indépendants. Le barème est donné à titre indicatif. Durée : 1 heure.

Question de cours (2 points)

Énoncer le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice n°1 (5 points)

- 1) Trouver un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de plus petit degré vérifiant les deux propriétés suivantes :
 - $(X - 1)^2$ divise $P(X) + 1$
 - -1 est racine double de $P(X) - 2$
- 2) Trouver un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de plus petit degré vérifiant les trois propriétés suivantes :
 - P est à coefficients réels
 - $P(i) = 0$
 - le reste dans la division euclidienne de P par $(X - 2)$ est 3

Exercice n°2 (8 points)

- 1) Calculer le pgcd unitaire D des polynômes $A = X^4 - 4X^3 + 2X^2 + X + 6$ et $B = X^4 - 3X^3 + 2X^2 + X + 5$.
- 2) Trouver deux polynômes U et V tels que $D = AU + BV$.
- 3) Déterminer les décompositions en facteurs irréductibles de A et B dans $\mathbb{R}[X]$.
- 4) Déterminer le ppcm unitaire de A et B .

Exercice n°3 (5 points)

On note a , b et c les racines complexes du polynôme $X^3 + X^2 + X - 1$.

- 1) Calculer $a^2 + b^2 + c^2$.
- 2) Trouver un polynôme unitaire P de degré 3 dont les racines sont $2a$, $2b$ et $2c$.