UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse et Probabilités 3

Corrigé rapide du test n°2 (Durée : 40 min)

Question de cours

On dit qu'une fonction f à valeurs réelles est ***continue par morceaux*** sur $[a, b]$, s'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ telle que la restriction de f à chaque intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$ ait un prolongement par continuité $g_i : [a_i, a_{i+1}] \longrightarrow \mathbb{R}$.

1 On a le développement limité au voisinage de 0 suivant :

A. $(1+x)^{2x} = 1 + 2x^2 + 2x(2x-1)\dfrac{x^2}{2} + x^4\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Faux : en effet, $(1+x)^{2x} = e^{2x\ell n\,(1+x)} = \exp\left(2x^2 - x^3 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right)$ donc par composition $(1+x)^{2x} = 1 + 2x^2 - x^3 + \frac{8}{3}x^4 + o(x^4)$ et non pas $(1+x)^{2x} = 1 + 2x^2 - x^3 + 2x^4 + o(x^4)$.

B. $\sqrt{1+\cos x} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{4}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Faux : en effet $\sqrt{1+\cos x} \xrightarrow[x\to 0]{} \sqrt{2} \neq \frac{3}{2}$.

C. $\ell n\,(\cos x) = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Faux : en effet $\ell n\,(\cos x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \neq 1$.

$\boxed{\textbf{D.}\quad \ell n\,(x+e^x) = 2x - \dfrac{3}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) \text{ avec } \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.}$

Exact : en effet, $\ell n\,(x+e^x) = \ell n\,(1 + 2x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2))$ et $\ell n\,(1+X) = X - \frac{1}{2}X^2 + o(X^2)$ et on obtient le résultat annoncé par composition.

2 On a l'égalité suivante :

$\boxed{\textbf{A.}\quad \dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{3} + x\varepsilon(x) \text{ avec } \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.}$

Exact : $\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$ donc $\dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{1}{x}.\dfrac{1}{1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)} = \dfrac{1}{x}\left(1 - \dfrac{x^2}{3} + o(x^2)\right)$.

B. $\cos\left(\dfrac{1}{3x}\right) = 1 - \dfrac{1}{6x^2} + \dfrac{1}{x^2}\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to +\infty} \varepsilon(x) = 0$.

Faux : en effet, $\cos\left(\dfrac{1}{3x}\right) = 1 - \dfrac{1}{18x^2} + \dfrac{1}{x^2}\varepsilon(x)$.

C. $\dfrac{x^2}{1-x^2} = -1 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^2}\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to +\infty} \varepsilon(x) = 0$.

Faux : en effet $\dfrac{x^2}{1-x^2} = -\dfrac{1}{1-\frac{1}{x^2}} = -\left[1 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^2}\varepsilon(x)\right]$

3

A. $\dfrac{\ell n\, n}{n\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.

$\boxed{\textbf{B.}\quad 1 + e^{-n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 - \dfrac{1}{n}.}$

C. $\dfrac{\ell n\, n}{n\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.

En effet, $\dfrac{\ell n\, n}{n\sqrt{n}} = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}.\ell n\, n$ avec $\lim\limits_{x\to +\infty} \ell n\, n = +\infty$ entraîne que A. et C. sont faux. D'autre part, $1 + e^{-n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 - \dfrac{1}{n}$ puisque les deux quantité ont tendent vers 1 en l'infini (et donc leur quotient aussi).

$\boxed{4}$ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.

A. La série $\sum u_n$ converge si et seulement si, à partir d'un certain rang, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.

Faux : car par exemple $\sum \frac{1}{n}$ diverge et pourtant $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{n}{n+1} < 1$.

B. La série $\sum u_n$ converge si et seulement si $u_2 + u_3 + \cdots + u_{n+2}$ a une limite finie

Exact : En effet, la somme proposée n'est autre que $S_{n+2} - S_1$ où S_n est la somme partielle d'ordre n de la série $\sum u_n$. .

C. Si $0 < a < 1$ alors la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^a}$ diverge.

Faux : elle converge d'après le CSSA ; c'est en effet une série alternée et la suite $(\frac{1}{n^a})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et de limite nulle (car $a > 0$).

D. Si la série $\sum u_n$ converge alors la série $\sum \sin(u_n)$ converge.

Exact : si $\sum u_n$ converge alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ et donc $\sin u_n \underset{n\to\infty}{\sim} u_n$. Le théorème d'équivalence pour les séries positives permet alors de conclure.

$\boxed{5}$ Soit f une fonction réelle définie et bornée sur l'intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.

A. Si f n'est pas uniformément continue sur $[a, b]$, alors f n'est pas continue sur $[a, b]$.

Exact puisque la contraposée de cette implication n'est autre que le théorème de Heine.

B. Une condition nécessaire pour que la fonction f soit intégrable sur $[a, b]$ est que f soit continue sur $[a, b]$.

Faux : ce n'est qu'une condition suffisante. Une fonction en escalier est intégrable...

C. Pour que f soit intégrable sur $[a, b]$ il faut que f soit continue par morceaux sur $[a, b]$.

Faux : ce n'est encore une fois qu'une condition suffisante.

D. Il suffit que f soit uniformément continue sur $[a, b]$ pour que f soit intégrable sur $[a, b]$.

Exact car alors f est continue sur $[a, b]$ et donc intégrable.

$\boxed{6}$ Soit f l'application de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ qui à x associe x^2. Soit n un entier. Alors :

A. $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{k^2}{8n^3}$ est une somme de Riemann associée à f sur $[0, 1]$.

Exact : on en effet peut écrire $S_n = \dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{2n}\right) = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f\left(\frac{k}{m}\right)$.

B. $S_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k^2$ est une somme de Riemann associée à f sur $[0, 1]$.

Faux : voir C.

C. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f$.

Faux : puisque $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

$\boxed{7}$ Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[0,1]$. Alors nécessairement :

A. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f \leqslant \int_0^1 f.$

Faux car par exemple, si f est constante égale à -1, on n'a pas $-\frac{1}{2} \leqslant -1$.

$\boxed{\textbf{B.} \quad \left(\displaystyle\int_0^1 f\right)^2 \leqslant \int_0^1 f^2.}$

Exact : cela résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz puisque

$$\left(\int_0^1 f.1\right)^2 \leqslant \int_0^1 f^2.\int_0^1 1^2 = \int_0^1 f^2$$

C. Si f est positive sur $[0,1]$ et si f n'est pas la fonction nulle alors $\displaystyle\int_0^1 f > 0$.

Faux. La fonction égale à 1 en $\frac{1}{2}$ et nulle ailleurs en est un contre-exemple.

D. Aucun des trois résultats précédents.

Faux : voir B.