Analyse et Probabilités 3

Corrigé rapide du test n°2 (Durée : 40 min)

Question de cours

On appelle ***somme de Darboux inférieure*** pour la fonction f et la subdivision X la somme

$$s(f,X) = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) \inf \{f(x),\ x \in [a_{i-1}, a_i]\}.$$

où $X = \{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$ avec $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$.

1 Au voisinage de 0, on a le résultat suivant :

A. $e^{1+x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Faux : en effet, $\lim\limits_{x\to 0} e^{1+x} = e \neq 1$.

B. $\sin(\ell n\,(1+x)) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Faux : en effet $\ell n\,(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ et $\sin X = X - \frac{X^3}{6} + o(X^3)$ donc, par composition, $\sin(\ell n\,(1+x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$.

C. $\sqrt[3]{7 + \cos x} = 2 - \frac{1}{24}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Exact : en effet $7 + \cos x = 8 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ et $\sqrt[3]{1+X} = 1 + \frac{1}{3}X + o(X)$ donc, par composition, $\sqrt[3]{7+\cos x} = \sqrt[3]{8}\sqrt[3]{1 - \frac{x^2}{16} + o(x^2)} = 2\left(1 - \frac{x^2}{48} + o(x^2)\right)$.

D. $\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{6}x + x\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Exact : en effet, $\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \frac{1}{x}.\frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)}$ et $\frac{1}{1-X} = 1 + X + o(X)$

donc, par composition, $\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x}.\left(1 + \frac{x^2}{6} + x^2\varepsilon(x)\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{6}x + x\varepsilon(x)$.

2 On a

A. $\ell n\,(1+n) = \underset{n\to+\infty}{O}(n)$. **B.** $\ell n\,(1+n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n$. **C.** $\ell n\,(1+n) = \underset{n\to+\infty}{o}(n)$.

En effet, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ell n\,(1+n)}{n} = 0$ donc **C.** est **exact** (et a fortiori **A.** aussi) et, cette limite n'étant pas 1, **B.** est **faux**.

3 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.

A. Si $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{3}{4}$ alors la série $\sum n^3 u_n$ converge.

Exact : en effet, l'hypothèse entraîne $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ donc $n^2.n^3u_n \underset{n\to\infty}{\sim} n^5\left(\frac{3}{4}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (croissances comparées) et le critère de Riemann permet de conclure.

B. Les séries $\sum u_n$ et $\sum \sin(u_n)$ sont de même nature.

Faux. Par exemple, la série positive $\sum n\pi$ diverge (grossièrement) mais la série $\sum \sin(n\pi)$ converge (c'est la série nulle).

C. Si la série $\sum \min(u_n, v_n)$ converge alors l'une au moins des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ converge.

Faux : on peut prendre comme contre-exemple les séries définies par $u_n = n$ et $v_n = 0$ pour n pair et $u_n = 0$ et $v_n = n$ pour n impair.

D. Si $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$ alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exact : En effet, on a alors $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} 2v_n$ donc $\sum u_n$ et $\sum 2v_n$ sont de même nature (théorème d'équivalence pour les séries positives) et donc il en est de même de $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

4 Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$. On suppose que f vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta \geqslant 0,\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \big(|x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\big)$$

Parmi les affirmations 1), 2) et 3) ci-dessous, combien sont vraies ?

1) f est nécessairement constante sur $\mathbb{R}$.
2) f est nécessairement continue sur $\mathbb{R}$.
3) f est nécessairement uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

En effet, en autorisant le choix $\delta = 0$, toutes les fonctions vérifient cette propriété.

5 Soit f une fonction réelle définie et bornée sur l'intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.

A. f est continue sur $[a, b]$ si et seulement si f est uniformément continue sur $[a, b]$.

Exact : Le sens direct résulte du théorème de Heine et la réciproque est claire.

B. Pour que f soit intégrable sur $[a, b]$ il faut que f soit continue sur $[a, b]$.

Faux : il ne s'agit que d'une condition suffisante.

C. Une condition nécessaire pour que f soit intégrable sur $[a, b]$ est que f soit une fonction en escalier sur $[a, b]$.

Faux : il ne s'agit que d'une condition suffisante.

6 Soit n un entier naturel. On considère la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{n+k}$.

Parmi les affirmations 1), 2) et 3) ci-dessous, combien sont vraies ?

1) S_n est une somme de Riemann de $f_1 : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ sur l'intervalle $[1, 3]$.
2) S_n est une somme de Riemann de $f_2 : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$ sur l'intervalle $[0, 2]$.
3) S_n est une somme de Riemann de $f_3 : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

En effet, $S_n = \dfrac{2}{2n} \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{1 + \frac{k.2}{2n}} = \frac{3-1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} f_1\left(1 + \frac{k(3-1)}{2n}\right)$ et $S_n = \dfrac{2-0}{2n} \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{1 + \frac{k(2-0)}{2n}}$ soit $S_n = \dfrac{2-0}{2n} \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} f_2\left(\frac{k(2-0)}{2n}\right)$. On en déduit que $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \displaystyle\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ell n\, 3 = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{1+x}$ et en particulier **C.** est faux puisque toute somme de Riemann de f_3 sur $[0, 1]$ converge vers $\displaystyle\int_0^1 f_3 = \ell n\, 2$.